Universidade de Lisboa

A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE NO 11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Filomena Maria Antunes Carreira

RELATÓRIO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA

2015

Universidade de Lisboa

A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE NO 11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Filomena Maria Antunes Carreira

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Henriques e coorientado pela Professora Doutora Maria Isabel Simão

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA

2015

Dedicatória

Aos meus pais, Esmeralda e Walter, aos meus amigos Carlos Barroco, David de Almeida e Raquel Carmo, pela luz refletida dos seus distintos "conceito imagem" de vida, que preservo com sublime amor.

Agradecimentos

À minha Orientadora, Prof.ª Dr.ª Ana Henriques, por me ensinar a puxar o fio do para-quedas sempre que me encontrava em queda livre.

À minha Coorientadora, Prof.ª Dr.ª Maria Isabel Simão, pela disponibilidade sempre demonstrada, palavras motivadoras e orientação nos voos.

Aos alunos da fantástica turma e à inesquecível Prof.ª Orientadora Cooperante Inês Campos por serem uma tripulação exemplar.

A todos os professores e investigadores que ao longo do tempo têm elaborado inúmeros manuais de instruções.

Aos meus amigos, em particular à Cármen Vítor, que souberam esperar que eu aterrasse e que persistentemente se mantiveram na torre de controlo.

À minha família, em particular ao meu irmão Jorge Walter, que sempre acreditaram que as nuvens podem ser um meio de transporte.

Aos meus futuros alunos por receberem o caderno de bordo.

À Matemática que me liberta de dogmas e preconceitos fomentando-me a capacidade de inovação no interior, na fronteira e no exterior da nuvem.

Ao João, Inês e Martim que são a génese de todas as nuvens.

Resumo

O presente estudo foi realizado no âmbito da prática de ensino supervisionada, numa turma do 11.º ano de escolaridade da escola Secundária da Ramada, no ano letivo de 2014/15. A unidade curricular “Taxa de Variação e Derivada” do programa de Matemática A (ME, 2001) foi alvo da minha lecionação, num total de cinco aulas de 90 minutos. No entanto, o estudo integrou também aspetos da minha observação com diferentes níveis de participação nos tópicos de funções racionais e sucessões reais.

O objetivo do estudo é compreender como os alunos desta turma construíram e utilizaram o conceito de limite, numa abordagem intuitiva, em contextos diversos (funções racionais, derivada e sucessões) e quais as dificuldades que evidenciaram.

As tarefas propostas aos alunos, no decorrer da lecionação, foram direcionadas para o desenvolvimento de intuições matemáticas, encaminhando os alunos para a generalização do conceito de derivada, bem como, para a noção do conceito de limite, tirando partido do uso de várias representações - gráfica, numéria, algébrica e linguagem natural.

A análise de dados, recolhidos por meio da observação participante (com registo áudio e vídeo das aulas lecionadas) e recolha documental das produções escritas dos alunos, permite concluir que parte dos alunos construiu um “conceito imagem” de limite pouco consistente, porque o seu “conceito imagem evocado” (Tall & Vinner, 1981) integra algumas dificuldades, tais como, a “inatingibilidade” do limite.

O estudo também permite concluir que alguns alunos tendem a utilizar o conceito de limite, na resolução das tarefas que envolvem o mesmo, por meio de estratégias dominantes de procedimentos algébricos, devido à compreensão instrumental (Skemp, 1978) que detêm do mesmo.

Outra conclusão do meu estudo é que parte dos alunos construíram e utilizaram o conceito de limite evidenciando compreensão relacional (Skemp, 1978) entre as várias representações e entre vários contextos, inferindo, deste modo, que o conceito de limite pode ser introduzido de forma intuitiva e formal.

Palavras-chave: Limite, “conceito imagem”, “conceito definição”, Derivada.

Abstract

The study presented below has been developed within the practice of supervised teaching, and applied to a 11^{th}grade class in the Ramada Secondary School, during the school year 2014/15. The curricular unit "Variation rate and Derivative" included in the Mathematics-Grade A program (ME, 2001) was the subject of five of my 90-minute lectures. Nonetheless, this study has also taken in aspects related to my observations concerning different levels of participation on the topics of rational functions and sequences.

The main purpose of this study has been to understand how the high school students of the class assemble and use the concept of limit, in an intuitive manner and in different tasks (rational functions, derivatives, sequences), and what difficulties they come upon.

The tasks suggested to the high school students, in class, were directed to the development of mathematical intuition, conducting them to the generalization of the concept of derivative, as well as to the notion of the concept of limit, taking advantage of various methods of representation, namely graphic, numerical, algebraic and natural language.

The integrated analysis of data obtained on the basis of direct observation (with audio and video records of lectures) and of written papers produced by the high school students, have led us to the conclusion that the *concept image* of limit assembled by a number of high school students is not very consistent, because their *evoked concept image* (Tall & Vinner, 1981) comprises some difficulties, such as the unattainability of the limit.

The present study shows that some high school students tend to apply the concept of limit to solve tasks involving it making use of dominant strategies in algebraic procedures, because they retain an instrumental understanding (Skemp, 1978) of that concept.

Another conclusion of this study is that part of the high school students assemble and use the concept of limit through relational understanding (Skemp, 1978) between several representations and between several contexts, thus making it possible to infer that the concept of limit can be introduced in an intuitive and formal way.

Key-words: Limit, "Concept image", "Concept definition", Derivative.

Índice Geral

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

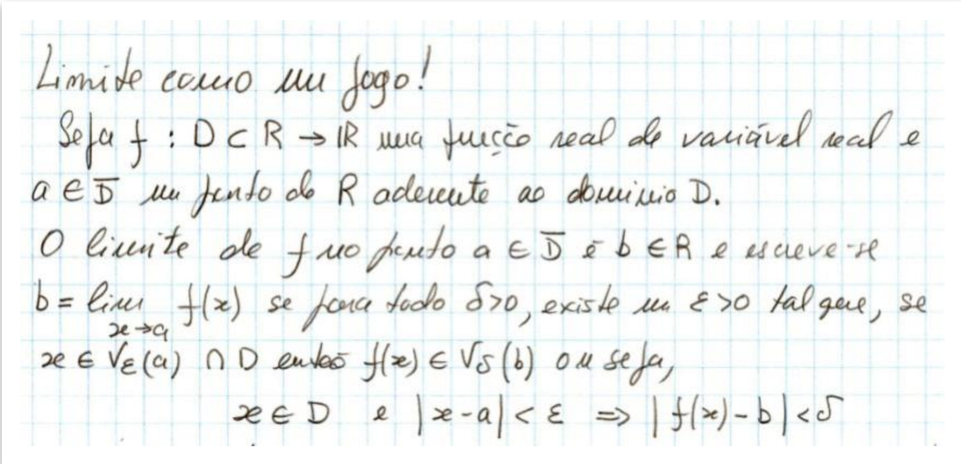
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática, como relatório da prática de ensino supervisionada, que decorreu em abril do ano letivo de 2014/15 numa turma do 11.º ano de escolaridade da escola Secundária da Ramada, a quem lecionei, no 3.º período, a unidade curricular "Taxa de Variação e Derivada" inserida no Tema II "Introdução ao cálculo diferencial I, funções racionais e com radicais e taxa de variação e derivada" do programa de Matemática A em vigor, do Ministério da Educação (ME, 2001).

1.1 Motivações e pertinência do estudo

No campo das motivações pessoais a escolha da aprendizagem da noção de limite, como foco da componente investigativa deste trabalho, considera a fusão de duas circunstâncias:

A primeira reporta a uma experiência pessoal. O conceito de limite, desde o início da minha frequência no ensino secundário em 1979, sempre me causou alguma "confusão". O modo como sempre me foi apresentado, através da definição formal, não foi para mim intuitivo. Representou a reprodução precisa de raciocínios e procedimentos ditados pelos professores. Após vinte e oito anos de interrupção nos estudos académicos de Matemática, aquando o meu reingresso na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) em 2009, dediquei-me ao estudo das unidades curriculares da Análise, pois eram as que me proporcionavam maior interesse e despertavam maior curiosidade, com enorme persistência e dedicação. Numa das primeiras aulas teóricas contatei novamente com o conceito de limite que, segundo o professor, iria ser dado de uma forma intuitiva; através de um jogo! Lembro-me que a minha concentração e entusiasmo não poderiam ter sido maiores, finalmente iria compreender este conceito. Antes do jogo, o professor escreveu no quadro (Figura 1):



Limite como um jogo!
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e
$a \in \overline{D}$ um ponto de $\mathbb{R}$ aderente ao domínio D.
O limite de f no ponto $a \in \overline{D}$ é $b \in \mathbb{R}$ e escreve-se
$b = \lim_{x \to a} f(x)$ se para todo $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, se
$x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ então $f(x) \in V_\delta(b)$ ou seja,
$$x \in D \text{ e } |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Figura 1 - Limite como um jogo (caderno diário de análise I, arquivo pessoal)

As regras foram mencionadas e um exemplo surgiu:

Seja $f(x) = x + 1$, e o proponente declara que o $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ (uma proposição claramente absurda). Então, caso o desafiante proponha ε = 10 , basta ao proponente escolher δ =1/2 , porque para valores de *x* entre -1/2 e 1/2, temos que *f(x)* está entre 1/2 e 3/2, ou seja, a distância de f(x) para 2 é menor que 10. Só que isto não é o bastante, o proponente deve responder ao desafio para todo ε então, caso o desafiante proponha ε = 1/10 , o proponente não será capaz de encontrar um δ com a propriedade desejada. Com esta explicação, a minha espectativa inicial não passou de uma ilusão. Ultrapassar as minhas dificuldades implicou despender largas horas de estudo a reconstruir processos de raciocínio erróneos previamente enraizados, o que não foi fácil.

A aprendizagem dos limites é fundamental para a prossecução da formação académica dos alunos, atendendo à sua centralidade no estudo da Análise matemática, equações diferenciais, Matemática superior aplicada à estatística, entre outras (Karatas, 2011). Conforme referem Fernández-Plaza, Rico e Ruiz-Hidalgo (2011), o conceito de limite é considerado um dos conceitos chave no pensamento matemático avançado, e a sua compreensão é um requisito para o sucesso dos alunos no Ensino Superior. Note-se, por exemplo, o relevo que o estudo dos limites tem em todas as licenciaturas da FCUL. Segundo Domingos (2003), constata-se um elevado número de retenções nos primeiros anos do Ensino Superior nas disciplinas que mais requerem a construção e compreensão dos conceitos matemáticos mais abstratos onde, o conceito de limite toma lugar. Por outro lado, a literatura de referência, nomeadamente Tall (1993), relata inúmeras dificuldades relacionadas com a aprendizagem deste conceito, e a sua mobilização na resolução de problemas. Estas dificuldades tais como uma incorreta articulação entre a representação simbólica e gráfica do limite de uma função (Biza, 2007), "inatingibilidade" do limite (Junter, 2008), significado coloquial de limite (Tall & Vinner, 1981) geram obstáculos na compreensão dos conceitos ligados à integração, derivada, continuidade e de limite de uma função racional, na transição da abordagem intuitiva de limite para a abordagem da sua definição formal.

É dentro deste contexto que surge a segunda circunstância que se prende com a primeira, e com uma reflexão pontual: Os alunos, quando têm contacto com o conceito de limite pela primeira vez, que imagens concebem? Que representações se vinculam a essas imagens? Quais serão algumas das suas dificuldades na aprendizagem do conceito de limite que podem conduzir a obstáculos na prossecução da aprendizagem? Esta situação despoletou uma das minhas preocupações como futura professora de Matemática que é a de compreender, com todas as limitações que isso acarreta, que significados os alunos desenvolvem do limite quando se deparam pela primeira vez com este conceito. Desta forma, desejando que os meus futuros alunos não passem pela mesma experiência que eu, atendendo à "dificuldade que os alunos têm em formar o "conceito imagem" apropriado e [ao facto de] as consequentes questões problemáticas serem fatores de conflito potenciais na futura aprendizagem da teoria formal" (Tall & Vinner, 1981, p. 153), resolvi aprofundar a minha compreensão acerca da aprendizagem dos alunos, no que respeita ao conceito de limite.

Além das circunstâncias motivacionais atrás referidas, o contexto escolar que me foi atribuído para a realização da prática de ensino supervisionada, e o programa em vigor, que integra a "introdução ao conceito de derivada recorrendo à noção intuitiva de limite" (ME, 2001, p. 5) no 11.º ano de escolaridade, proporcionaram oportunidade e justificaram a opção da componente de lecionação na Unidade de Ensino (UE) "Taxa de variação e derivada ".

1.2 Objetivo e questões do estudo

O presente estudo foi realizado na Escola Secundária da Ramada numa turma de 11.º ano do curso geral de Ciências e Tecnologias, que acompanhei desde o início do ano letivo de 2014/15. Durante o 1.º período deste ano letivo tive a oportunidade de contatar de perto com o contexto escolar, particularmente no que respeita ao conhecimento dos alunos da turma e de preparar, lecionar e refletir sobre algumas aulas. Esta prática foi o ponto de partida para a elaboração do estudo pois, conforme refere Abrantes (1985), as características da turma e a relação do professor com os alunos são dois dos muitos aspetos a considerar, no processo de ensino aprendizagem. O ensino aprendizagem servirá de base integral deste estudo, dada a minha forte convicção de que ensinar e aprender, neste caso Matemática, passa por "experiências individuais e coletivas que promovem as capacidades de raciocínio dos alunos" (NCTM, 2012, p. 4) e didáticas do professor.

O estudo tem como objetivo compreender como os alunos de uma turma de 11.º ano constroem o "conceito imagem" de limite e como utilizam o conceito do mesmo na resolução de tarefas, ao longo de uma UE que privilegia uma abordagem intuitiva em contextos diversos (funções racionais, derivada e sucessões) e quais as dificuldades que manifestam.

As questões do trabalho de cariz investigativo formuladas a partir do objetivo são:

- Qual o "conceito imagem" de limite que os alunos constroem, ao longo da unidade de ensino, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?
- Como é que os alunos utilizam o conceito de limite na resolução de tarefas que o envolvem, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?

1.3 Organização global do estudo

No Capítulo 1 são referidas as razões e motivações que justificam a escolha do tema do estudo, bem como a explicitação do objetivo e questões de investigação que lhe são inerentes. O enquadramento curricular e didático do trabalho são abordados no Capítulo 2, recorrendo a literatura de referência nesta temática e às orientações curriculares para a disciplina de Matemática A, do 11.º ano do Ensino Secundário. Segue-se o Capítulo 3 com a apresentação da UE escolhida para a lecionação das aulas e que também serve de base à componente investigativa deste trabalho, incluindo a caracterização do contexto escolar. No Capítulo 4 são indicados os métodos e procedimentos de recolha de dados. A análise dos dados recolhidos ocupa o Capítulo 5. Por último, o Capítulo 6 dá lugar à síntese e às principais conclusões a que o estudo me conduziu e subsequente reflexão.

CAPÍTULO 2 - ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

No 11.º ano de escolaridade os alunos iniciam o estudo da Análise Infinitesimal onde abordam pela primeira vez, no estudo das assimptotas de funções racionais, o conceito de limite que, subsequentemente está presente no estudo da diferenciabilidade e da convergência de sucessões reais. Este capítulo enquadra a problemática do estudo recorrendo a literatura de referência, e a orientações curriculares respeitantes ao ensino e aprendizagem de limites. Assim, será abordada a noção de limite, vista como uma estrutura cognitiva associada ao "conceito imagem" e ao "conceito definição", enquadrada no programa de Matemática em vigor (ME, 2001). É de realçar que a possibilidade de articular a literatura de referência e o programa em vigor, permite a elaboração de uma estrutura teórica apropriada na procura de respostas para as questões do trabalho de cariz investigativo.

2.1 A noção de limite vista como uma estrutura cognitiva

Tall e Vinner (1981) definiram o termo "conceito imagem" para descrever uma estrutura cognitiva que está associada a um conceito. Conforme referem, o "conceito imagem" inclui todas as "imagens mentais" ("*mental pictures*"), propriedades associadas e processos relacionados com o conceito com que o sujeito se depara. Desta forma, cada conceito adquire um "conceito imagem" na mente de cada indivíduo. Diferentes partes do "conceito imagem" podem ser ativadas em distintas situações mas, ao considerarmos um todo, o "conceito imagem" do conceito é uma entidade.

Para especificar "conceito definição", segundo os mesmos autores, há que apresentar previamente duas visões distintas do mesmo; a de Shlomo Vinner (1983) e a de David Tall (2003), bem como o seu ponto acordante retratado em Tall e Vinner (1981).

Os conceitos matemáticos formalmente definidos; "conceito definição", e os processos cognitivos onde os mesmos foram concebidos; "conceito imagem" devem ser demarcados, conforme refere Vinner (1983). Segundo a visão do mesmo autor, o "conceito definição" inclui o sistema axiomático da Matemática, que consiste em definições, axiomas e linguagem matemática, porém, o conhecimento da definição não garante a compreensão do conceito, o que leva à necessidade da construção de um "conceito imagem" do mesmo (Vinner, 1991).

Conforme Tall (2003) refere, o "conceito definição" pode ser especificado através de palavras ou escrita matemática e deve ser considerado como uma parcela do "conceito imagem" total que existe na nossa mente, o que contrapõe a opinião de Vinner ao salientar a demarcação entre o "conceito imagem" e o "conceito definição". O aluno, ao tentar compreender a definição formal que está presente, por exemplo, num manual de Matemática, tem de interpretar a definição, ou seja, tem de criar a sua interpretação pessoal da definição formal. Por outro lado, caso o aluno não tenha tido, ainda, contato com a definição formal do conceito pode construir o "conceito definição" sobre a forma de palavras relacionadas em maior ou menor grau com o conceito global em estudo. Ambas as circunstâncias dão origem à construção do "conceito definição".

Apesar destas duas visões, Tall e Vinner consideram ser possível falar de imagem do "conceito definição" e portanto, este pode ser considerado uma parte do "conceito imagem", o que nos reporta para um texto escrito por Tall e Vinner em 1981.

Optei por fundamentar este estudo na explicitação de "conceito definição" estabelecida em Tall e Vinner (1981) que é a " forma de um conjunto de palavras, utilizadas [pelo aluno] para especificar o conceito [de limite] " (p. 152) e parte integrante do "conceito imagem", já que Tall (2003) deixa ao critério do investigador a versão que prefere escolher, e a definição do "conceito definição" presente em Tall e Vinner (1981) vai ao encontro do enquadramento curricular do estudo. A definição formal de limite, especificada somente através de escrita matemática, não é introduzida no 11.º ano de escolaridade, conforme indicações metodológicas do programa em vigor (ME, 2001), porém desenvolve-se de modo intuitivo e formal. Assim, o conceito de limite é abordado intuitiva e analiticamente através da "interpretação de fenómenos [da vida real] e resolução de problemas" (ME, 2001, p. 4), o que leva a uma "aproximação gradual do conceito de limite" (ME, 2001, p. 6). Desta forma, a definição formal de limite é introduzida com "progressivo nível de rigor e formalização" (ME, 2001, p.10). Contextualizando o atrás referido optei por considerar, neste estudo, que quando o aluno é confrontado com a noção geral do conceito de limite associa toda ou parte da estrutura cognitiva que possui inserida no seu "conceito imagem". No "conceito imagem" está inscrito o "conceito definição", sustentado por interpretações pessoais que possam ser expressas por palavras e escrita matemática (respeitando o nível de conhecimento em que o aluno se encontra). Porém, a definição formal de limite (expressa somente em escrita matemática) é por mim abordada neste estudo, pontualmente, como por exemplo no Capítulo 6 - Conclusões do estudo, quando surgem algumas dificuldades na construção do "conceito imagem" de limite que espelham situações de conflito em aprendizagens futuras, isto é, quando o aluno tiver o primeiro contato com a definição formal atrás referida.

A estrutura cognitiva que o aluno forma acerca do conceito de limite pode diferir do conceito formal, e contém fatores que causam conflitos cognitivos, conforme referem Tall e Vinner (1981), que se traduzem, segundo Tall (1993), num número significativo de dificuldades para os alunos, parte das quais considerei alvo de análise no estudo.

A mente humana não é lógica pura, o que nos leva a cometer "erros" e há que distinguir os conceitos matemáticos formalmente definidos, e os processos cognitivos onde os mesmos foram concebidos (Tall & Vinner, 1981). O "conceito imagem", segundo os mesmos autores, pode dar origem a um processo "erróneo" ou "bem-sucedido" se partes da sua evocação causam, ou não, situações de conflito, e difere de indivíduo para indivíduo, podendo vir a ser alterado no tempo.

Para especificar o resultado "erróneo" interessa relembrar o que se entende por representações mentais, isto é, os atributos mentais associados ao conceito que estão incluídos no "conceito imagem", e distintos do "conceito definição", sejam eles conscientes ou inconscientes. O "conceito imagem" ou "conceito definição" incluem aspetos referentes a propriedades e a processos do conceito já construídos na mente do aluno (Tall & Vinner, 1981). Para clarificar e aumentar a minha própria compreensão desta estrutura cognitiva, bem como facilitar o futuro leitor à apreensão da mesma, sistematizei no Quadro I a informação recolhida na literatura de Tall e Vinner (1981) e Tall (1993) sobre o conceito de limite, que é o foco deste estudo.

A parte (representações mentais construídas pelo aluno) constituinte do "conceito imagem" ou "conceito definição" que pode gerar conflitos com outra parte dos mesmos é definida por Tall e Vinner (1981) como fator de conflito potencial (*potencial conflit factor*). Quando estes fatores de conflito potencial são acionados em simultâneo passam a ser intitulados de fatores de conflito cognitivos (*cognitive conflit factors*) formando conflitos cognitivos que, no senso comum, são denominados de confusões/dificuldades do aluno (Quadro II). O processo de raciocínio matemático é considerado “erróneo” quando esses conflitos cognitivos se revelam ao emergirem as confusões/dificuldades dos alunos. O processo de raciocínio matemático “bem-sucedido” resultará de um “conceito imagem” consistente, onde não estão incluídos, à partida, fatores de conflito potencial.

Conforme Tall e Vinner (1981) exemplificam, a definição de um número complexo $x + yi$ como um par ordenado de números reais (x, y) e a identificação de $x + 0i = (x, 0)$ como sendo o número real x, são fatores de conflito potencial no conceito de número complexo porque os mesmos incluem um conflito potencial com a noção teórica formal de que o elemento x é distinto do par ordenado $(x, 0)$. O aluno poderá questionar, quando iniciar o estudo dos números complexos, como é que um número real pode ser igualmente um par ordenado? O aluno, ao revelar a sua dificuldade, anuncia que os fatores de conflito potencial, que são a representação mental de número real e a de par ordenado, se transformaram em fatores de conflito cognitivo, porque os mesmos foram acionados em simultâneo. Conforme investigações efetuadas, os alunos geralmente não consideram um número real, por exemplo $\sqrt{2}$, como sendo um número complexo, porém alguns desses alunos definiram números reais como sendo “números complexos com parte imaginaria zero” (Tall & Vinner, 1981, p. 154). Desta forma, e sem causar qualquer conflito cognitivo, $\sqrt{2}$ é considerado como um número real e $\sqrt{2} + 0i$ um número complexo, o que se traduz em duas entidades distintas, ou a mesma, dependendo das circunstancias onde for convenientemente avaliado pelos alunos, contudo se evocados em simultâneo passam a fatores de conflito cognitivo. O aluno poderá questionar, como por exemplo, porque é que a representação algébrica (escrita matemática) de $\sqrt{2}$ é diferente de $\sqrt{2} + 0i$ se afinal, $\sqrt{2}$ é igual a $\sqrt{2} + 0i$.

À fração do “conceito imagem” que é ativado num determinado momento chama-se “conceito imagem evocado” (*evoked concept image*). Este “conceito imagem evocado”, fração do “conceito imagem” dos alunos, pode ser acionado quando os mesmos se deparam com o conceito geral de limite, mas não é reconhecido pelos matemáticos como parte da teoria formal dada a sua estrutura informal (Tall & Vinner, 1981), que é o caso do “conceito definição” especificado através de palavras.

O tipo mais grave de fator de conflito potencial é aquele que, inserido no "conceito imagem" entra em contradição com a própria definição formal do conceito, e não com outra parte do "conceito imagem" (Tall & Vinner, 1981). Este tipo mais grave de fatores de conflito potencial pode impedir, seriamente, a aprendizagem da teoria formal, porque podem os mesmos ficar encapsulados ("escondidos") (Tall, 1993), quer dizer, não passarem, num determinado momento, a fatores de conflito cognitivo. Estes fatores de conflito potencial transformar-se-ão em fatores de conflito cognitivo quando a definição formal do conceito desenvolver um "conceito imagem" que os origine. Os alunos, que apresentam este tipo mais grave de fatores de conflito potencial, quando contatam com a definição formal do conceito, podem estar seguros nas suas interpretações das noções envolvidas, e olhar para a teoria como sendo supérflua e inoperativa (Tall & Vinner, 1981), porque dificilmente a conseguem compreender. O aluno pode assumir que o limite de uma função nunca é atingido, (fator de conflito potencial) e paralelamente, após resolução algébrica sem compreensão do conceito (fator de conflito potencial), encontrar um valor exato de um limite, sem que isso lhe cause confusão. Porém, ao ter contato com a definição formal (….Diz-se que o limite de f no ponto $a \in \overline{D}$ é $b \in R$ e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se…..), os fatores de conflito potencial indicados podem ser evocados simultaneamente (fatores de conflito cognitivo) e o aluno questionar como é que o limite de uma função nunca é atingido apesar de, em limite, essa mesma função tomar um valor exato.

O aluno pode utilizar dois métodos para lidar com os conflitos cognitivos ("confusões/dificuldades") conforme expõe Tall (1993): Reconcilia as noções que tinha com as novas reconstruindo assim uma coerente estrutura cognitiva, quer dizer, clarifica as suas dificuldades, ou mantém os elementos conflituosos em compartimentos separados, e nunca os transporta simultaneamente para a mente consciente. Neste último caso, os fatores de conflito potencial não serão acionados em simultâneo, eles ficarão encapsulados ("escondidos") (Tall, 1993), o que se traduz na inexistência de fatores de conflito cognitivo, pelo que os alunos não terão consciência das suas dificuldades. Este último método faz com que o aluno separe a "teoria problemática", caso da definição formal de limite, dos métodos práticos para resolver problemas, como por exemplo, a manipulação algébrica envolvida no cálculo do limite, o que vai ao encontro de Ervynck (1981), citado em Tall (1993), ao concluir que muitos alunos têm uma compreensão “perigosa” de limite, e que só alguns conseguem alcançar uma total compreensão da definição rigorosa.

Três diferentes “mundos” matemáticos foram hierarquizados por Juter (2008) de forma a distinguir distintas formas de pensamento matemático, e com a finalidade de “adquirir uma panorâmica alargada da evolução cognitiva matemática [dos alunos] ” (Tall, 2004, p. 287).

O primeiro “mundo”, “mundo corporificado” (*embodied world*) que reúne, num corpo, elementos dispersos, é onde os alunos utilizam a sua perceção física do mundo real para realizar experiências mentais, na construção de conceitos matemáticos. Nessas experiências está incluída a noção intuitiva de limite de uma função.

O segundo “mundo” é intitulado como o “mundo proceptual”. Nesta etapa, os alunos iniciam procedimentos baseados nas conceções elaboradas no primeiro “mundo”, e usam símbolos que permanecem encapsulados como se fossem conceitos. Desta forma, os símbolos representam processos e conceitos, conforme refere Juter (2008) baseada em Gray e Tall (1994), e são intitulados de “procepts”. Os “procepts” são utilizados pelos alunos de uma forma dual, ou seja, o aluno utiliza-o como um processo ou um conceito, dependendo do contexto. Para exemplificar o supracitado passo a referir o símbolo 3 que, de uma forma dual, pode representar o processo de contagem [1, 2, 3] ou o conceito de número [… 3]; o símbolo $f'(x)$ pode ser contextualizado, por exemplo, no processo da diferenciação por aplicação de uma regra, ou no conceito de derivada, entre outros. Desta forma, Gray e Tall (1994) referem que o “procept” exige um pensamento matemático abstrato uma vez que representa um processo de fazer e um conceito para pensar. Um exemplo associado ao conceito de limite que ilustra a caraterística dual do “procept” é a notação $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ que representa ao mesmo tempo o processo dinâmico, que é o de $\frac{1}{x}$ se aproximar gradualmente de um limite, e o conceito de valor desse limite.

O terceiro “mundo” é o “mundo formal” onde as propriedades são expressas através de definições formais como axiomas. Os alunos vão transitando de “mundo” conforme as suas necessidades e processo de aprendizagem, dando lugar à formação ou alteração das representações mentais que possuem de um determinado conceito.

Azcarate (1991), mencionado em Tall (1993), estudou os vários níveis de conhecimento do conceito de limite em que se encontrava um grupo de alunos. O tema, a velocidade instantânea, começou a ser abordado através do conceito de quociente (distância/tempo) por meio da ideia de aproximação, que era a de calcular a velocidade num intervalo de tempo cada vez mais pequeno, até à noção de velocidade instantânea, caracterizada numa representação gráfica “tempo/distância” pelo gradiente da tangente (taxa de variação ou derivada). Azcarate entrevistou os alunos, antes, durante, e depois das aprendizagens considerando quatro níveis de compreensão do conceito de limite. Deste modo, analisou se os alunos tinham transitado, por exemplo, da ideia de aproximação (3º nível) para a noção de limite (4º nível). No final da aprendizagem, mais ou menos 39% dos alunos não tinham compreendido o conceito de limite o que o levou a concluir que os mesmos iriam experimentar grandes dificuldades num futuro próximo quando, por exemplo, entrassem em contato com a definição formal de limite.

Conforme evidencia o estudo atrás referido, os alunos têm diferentes níveis de compreensão do conceito de limite. Skemp (1978) considera dois tipos de compreensão matemática: a compreensão instrumental e a compreensão relacional. A compreensão instrumental diz respeito à aquisição de regras, ou métodos, e à capacidade de as usar na resolução de problemas. É privilegiado o saber como “sem saber porquê”. Neste caso, o objetivo é procurar uma regra que permita dar uma resposta satisfatória para o problema, como por exemplo, o procedimento algébrico no cálculo do limite, sem compreensão do conceito. A compreensão relacional baseia-se em princípios que têm uma aplicação mais geral. Assenta no princípio de saber ao mesmo tempo, o “como” e o “porquê”. Permite não só perceber o método que funciona e o “porquê” de funcionar bem como ajuda a compreender o que é requerido no problema. Deste modo, também possibilita a adaptação para a resolução de novos problemas. A compreensão relacional é essencial na construção consistente do “conceito imagem” de limite, porque proporciona, entre muitos aspetos, conexões entre contextos diversos, como por exemplo, na utilização do conceito de limite no contexto das funções racionais, diferenciabilidade e sucessões.

Procurando a articulação da literatura de referência com o programa, e remetendo o leitor para a próxima seção, considero que o “conceito imagem” de limite, definido como uma estrutura cognitiva em construção, e não somente a introdução da definição formal de limite, está contemplado nas sugestões das capacidades, cálculo e grau de formalismo do programa em vigor (ME, 2001). De modo a fundamentar esta consideração cito que “o grau de formalismo deve sempre ter em conta o nível de maturidade matemática dos estudantes, e deve surgir se possível como necessidade, depois do professor ter a certeza que o estudante apropriou verdadeiramente o conceito" (ME, 2001, p. 11) que, neste caso, é o conceito de limite.

2.2 Ensino e aprendizagem de limites

No 11.º ano de escolaridade inicia-se a abordagem intuitiva ao conceito de limite (ME, 2001) onde os alunos, confrontados com o mesmo, desenvolvem resoluções que não são só executadas através de manipulações algébricas ou simples aritmética, como por exemplo, a interpretação geométrica da taxa de variação que encaminha o aluno à definição de derivada recorrendo à noção intuitiva de limite. O conceito geral de limite introduz uma novidade no seu conhecimento matemático requerendo "competências ao nível da capacidade de abstração" (Juter, 2008, p. 2320), o que nem sempre é explorado ao longo do percurso escolar do aluno até ao 11.º ano.

Com o passar do tempo e a aprendizagem dos alunos, os "conceitos podem ser refinados no seu significado e a sua interpretação ser subtilmente ampliada, com ou sem a luxúria de uma definição precisa" (Tall & Vinner, 1981, p. 151). Esta situação reflete-se muito superficialmente neste estudo, dada a sua limitação temporal, quando uma abordagem intuitiva do conceito de limite é aplicada em contextos diversos (funções racionais, derivada e sucessões reais).

O conceito de limite pode ser para o aluno, inicialmente, um processo intuitivo de "chegar próximo", tal como considerado nas indicações metodológicas das orientações curriculares atuais (ME, 2001) referentes ao 11.º ano, e mais tarde, ensino superior, uma definição de "épsilon-delta" que sequencialmente será substituída por alguns teoremas previamente demonstrados (Tall, 1993). Este aspeto é exemplificado com o "conceito definição" de limite que os alunos vão construindo ao longo da UE onde o grau de formalismo é gradualmente trabalhado. O processo intuitivo de "chegar próximo" poderá ser formalmente escrito como "se x ***tende para*** a, então $f(x)$ aproxima-se de b" ou "se $x \to a$, então $f(x)$ aproxima-se de b" ou "podemos fazer com que $f(x)$ esteja tão próximo de b desde que o x esteja suficientemente próximo de a" (Tall & Vinner, 1981) até chegar à definição formal de limite especificada através de escrita matemática, a ser introduzida no ensino superior.

Tall e Vinner (1981) referem que os alunos devem ter contato com a definição formal de limite após construírem um "conceito imagem" consistente, o que vai ao encontro do programa em vigor quando menciona que se deve fazer uma "Aproximação gradual dos conceitos de continuidade, derivadas e limites" (ME, 2001, p. 4).

Conforme refere Tall (1993), educadores matemáticos em França verificaram que a aprendizagem, através de uma abordagem formal dos conceitos, tem demonstrado falhas fundamentais. O Instituts de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques (IREMs) alvitrou a necessidade de rever esta questão, de forma a tornar a aprendizagem mais significativa para os alunos. Por outro lado, o programa em vigor refere:

> Defende-se que os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente, mas defende-se que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas, sem que, em algum momento, se confunda o grau de precisão de um conceito matemático com qualquer grau de "simbolização". Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática (ME, 2001, p. 19).

Desta forma, depreende-se que o conceito de limite deverá ser introduzido de uma forma intuitiva, hierarquizado e enquadrado conforme os diferentes significados do conceito de limite que os alunos vão construindo ao longo da sua aprendizagem. Uma abordagem inicial ao conceito de limite que recorra diretamente à sua definição formal pode não trazer vantagem em termos da compreensão do seu conceito, conforme afere um estudo realizado por Tall e Vinner (1981) a alunos do 1.º ano do ensino superior (nível de escolaridade no qual os alunos já tiveram contato com a definição formal de limite de uma função). O estudo solicita, através de um questionário entregue aos alunos, a definição de $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Dos dezoito alunos que usaram o "conceito definição" formal ($Dado\ h > 0, existe\ k > 0\ tal\ que\ 0 < |x - a| < \mathrm{k} => |\mathrm{f(x)} - \mathrm{c}| < \mathrm{h}$) apenas quatro deram uma resposta correta enquanto que dos trinta e um que fizeram uma abordagem dinâmica (à medida que x tende para a, $f(x)$ aproxima-se de c ; processo dinâmico de limite que está inserido no "conceito imagem" do aluno) apenas quatro deram respostas incorretas.

A título de nota, caso este estudo se realizasse em anos letivos futuros, o conteúdo e metas curriculares (MEC, 2014) para o 11.º ano referem:

> A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição (MEC, 2014, p. 15).
>
> 1.Identificar, dada uma sucessão (u_n), um número real l como «limite da sucessão(u_n)» ou como «limite de (u_n) quando n tende para +∞» quando, para todo o número real δ>0 , existir uma ordem $p \in N$ tal que $\forall n \in N, n \geq p => |u_n - l| < \delta$, referir, nesta situação, que «u_n tende para l» («$u_n \to l$»), e designar a sucessão (u_n) por «convergente» quando um tal limite l existe e por «divergente» quando não for convergente (MEC, 2014, p. 32).
>
> 31. Saber de memória os limites das sucessões de termo geral $n^p (p \in Q), a^n \ e \ \sqrt[n]{a} \ (a > 0)$ (MEC, 2014, p. 35).

Acho oportuno realçar esta indicação metodológica, inserida no próximo programa em vigor (MEC, 2014) porque, conforme a literatura que fundamenta este estudo e as investigações realizadas, os alunos "têm grandes dificuldades em compreender as definições formais [dos conceitos] …bem como a manipulação dos quantificadores" (Tall & Vinner, 1981, p. 167) e a noção de convergência somente deve ser introduzida no final da aprendizagem, ou seja, após os alunos construírem um "conceito imagem" de limite bastante consistente. A aprendizagem do conceito de limite com base na definição formal pode fazer com que a base do "conceito definição" que se forma na estrutura cognitiva do aluno seja bastante fraca (Tall & Vinner, 1981). A maior parte dos alunos revela, em estudos efetuados pela literatura de referência, grande dificuldade ao lidar com o uso dos quantificadores existencial e universal na definição formal de limite de uma sucessão. Interpretando a meta curricular 1 acima transcrita e fundamentando-me na literatura de referência deste estudo, passo a mencionar que, a representação mental de "existência" e "universalidade" *(parte do "conceito imagem" de limite de uma sucessão)* é considerado um fator de conflito potencial do tipo mais grave (Tall & Vinner, 1981) pois entra em contradição, pelas dificuldades dos alunos reveladas nos estudos efetuados, com a própria definição formal do conceito de limite de uma sucessão *(parte do "conceito definição" de limite de uma sucessão)* e não com outra parte do "conceito imagem" da mesma. Estas duas partes, ao serem acionadas em simultâneo, geram um conflito cognitivo que encaminha o aluno a desenvolver um processo de raciocínio matemático erróneo que, atendendo às caraterísticas mencionadas, põe em causa uma total compreensão da definição rigorosa de limite repercutindo-se na construção de um "conceito imagem" bastante fraco. O aluno, ao ter dificuldade com o uso do quantificador existencial e universal como poderá compreender a representação simbólica utilizada (existir uma ordem $p \in N$ tal que $\forall n \in N, n \geq p => |u_n - l| < \delta$)?

Destaco, ainda inserido neste contexto, que os alunos têm pela primeira vez contato com os quantificadores existencial e universal no 10.º ano de escolaridade (MEC, 2014, LTC10, p.4), o que me leva a questionar acerca da consistência do próprio "conceito imagem" dos quantificadores. Será que este é suficientemente consistente para suportar a complexidade, a este nível de escolaridade, da definição formal de limite de uma sucessão?

É também de realçar que esta indicação metodológica contraria a metodologia do programa atual (ME, 2001) que é igualmente sugerida na literatura de investigação em educação.

Também como indicação metodológica (MEC, 2014), o conceito de limite é introduzido aos alunos através da definição formal de limite de uma sucessão que é uma das características de um ensino direto/expositivo (Ponte, 2005), apesar dos estudos apontarem que os "alunos habituados a uma abordagem de ensino exploratório alcançam o mesmo nível de desempenho no manuseamento habitual do cálculo de limites, mas têm um desempenho significativamente mais elevado na compreensão do conceito" (Tall, 1993, p. 8).

2.3 O papel das representações na compreensão do conceito de limite

Em adição aos sistemas de numeração existem as notações algébricas, representações gráficas, linguagem natural, entre outras, que são designadas por representações matemáticas (Duval, 2006). A linguagem natural; associações verbais concetuais, está fortemente ligada a argumentos provenientes de observações e de conjeturas, conforme refere Duval (2006), o que fundamenta a sua inclusão no estudo do conceito de limite. Quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre várias representações aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente (NCTM, 2007) e Tall (1993) realça a importância da articulação entre as representações gráfica, numérica (tabelas) e simbólica (algébrica), no estudo do conceito de limite. Desta forma optei por dar ênfase, neste estudo, a estas três últimas representações bem como à representação da linguagem natural.

O cálculo dos limites pode ser introduzido em sala de aula através de tarefas com "tabelas representativas dos valores que a função pode assumir [representações numéricas] e representações gráficas expressas como entidades simbólicas" (Juter, 2008, p. 2321). Este aspeto permitirá a exploração de várias representações (gráfica e numérica) que conjuntamente com as representações simbólica (algébrica) e linguagem natural podem espelhar parte da estrutura cognitiva que está associada ao conceito de limite, ou seja, "conceito imagem" de limite (Tall & Vinner, 1981, p. 151). De acordo com Kaput (1992), citado por Karatas et al. (2011), o uso de mais que uma representação ou sistema de notação, auxilia o aluno a apreender melhor um conceito matemático e Sierpinska (1994), citada em Domingos (2003), considera as representações como elementos fundamentais para a compreensão, admitindo que estas estão na sua base. Uma só abordagem de representação gráfica, conforme constatado por Tall (1993), não é suficiente; é necessária a utilização versátil das três representações ou seja, gráfica, numérica (tabelas) e simbólica (algébrica) para que seja facilitado ao aluno a exploração de vários pontos de vista, o que promove a sua compreensão, sentido crítico, e desenvolve o sentido de abstração necessário no conceito de limite (Juter, 2008).

As representações gráficas fornecem uma visão global qualitativa enquanto a numérica faculta resultados quantitativos, e a simbólica proporciona uma forte habilidade na manipulação do cálculo (NCTM, 2007).

As diferentes representações apresentadas facilitam diferentes formas de pensar, porque proporcionam vários pontos de vista ao enquadramento da noção de limite em diversos contextos, como por exemplo, funções racionais, derivada, e sucessões. Ajudam a promover as discussões em grande turma que facultam e consolidam a comunicação Matemática, entre muitos outros aspetos. Desta forma, o conceito de limite pode ser mais facilmente compreendido o que origina uma construção do seu "conceito imagem" mais consistente. O "conceito definição", que inicia a sua construção através de linguagem natural, por exemplo, "Se x tende para a então $f(x)$ aproxima-se de b" pode, gradualmente, ir sendo transformado em

"$\lim_{x \to a} f(x)$", depois em "$Se\ x\ pertence\ ao\ domínio\ D\ da\ função\ e\ |x - a| < \varepsilon => |f(x) - b| < \delta$", até chegar à definição formal de limite.

Conforme refere Tall (1993), um dos objetivos e princípios orientadores de ensino da Universidade de Havard é, quando exequível, o uso das três representações (gráfica, numérica e simbólica) como estratégia de ensino. A "regra dos três" (R3), como é apelidada, diz que, sempre que possível, os tópicos devem ser ensinados deste modo. O objetivo é produzir diferentes formas de aprendizagens para que os alunos tenham acesso à ideia principal a partir de vários ângulos. Juter (2008) refere que "quanto mais conexões de representações o aluno estabelecer melhor compreende o conceito", o que se enquadra eficazmente na capacidade/aptidão que o aluno deve desenvolver que é a de "exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens" (ME, 2001, p. 5).

Embora seja importante ter várias representações de um conceito, a sua existência, por si só, não é suficiente para tornar flexível o seu uso e, para compreender os conceitos necessitamos que as conexões entre as mesmas sejam corretamente efetuadas (Domingos, 2003). A necessidade de mudar de uma representação para outra torna-se evidente sempre que a outra seja mais eficiente para o que pretendemos estudar. A taxa de variação de uma função é, geralmente, mais visível na representação gráfica ao passo que o valor exato de x para os quais $f(x)$ é máximo ou mínimo poderá ser, mais facilmente, determinado utilizando a representação numérica (tabela) ou simbólica (algébrica). O importante, para além do aluno saber utilizar as várias representações, é que este possa usar, tendo como exemplo o caso atrás referido, a representação gráfica para explicar o valor obtido na representação simbólica ou vice-versa. Os resultados das investigações efetuadas evidenciam que os alunos que têm mais sucesso no cálculo dos limites são os que invariavelmente têm flexibilidade em utilizar as diferentes abordagens: simbólica, numérica e gráfica (Tall, 1993).

2.4 Principais dificuldades na aprendizagem do conceito de limite

A literatura destaca que existem dificuldades na aprendizagem dos alunos no que respeita à apreensão do conceito de limite. A compreensão instrumental do conceito de limite pode trazer dificuldades ao cálculo em geral que preenche um vasto campo de aplicação noutras disciplinas (Biza, Diakoumopoulos e Souyoul, 2007). Perante estas afirmações, diversos estudos têm identificado fatores potenciais de conflito atendendo à necessidade de compreender a natureza de alguns problemas.

Um estudo realizado por Davis e Vinner (1986), que pretende aferir sobre a compreensão do conceito de limite de uma sucessão, evidenciou que o "conceito imagem" do limite da mesma estava incorretamente formado na maior parte dos alunos. O estudo foi antecedido pela implementação daquilo que os autores designam por uma pedagogia apropriada, onde o professor teve em atenção a necessidade de usar exemplos de sucessões que tendem ou não para um limite e, ao mesmo tempo, foi implementada a definição formal. Os alunos já tinham tido contato com o conceito de limite de uma sucessão no 11.º ano e no final do mesmo eram considerados pelo professor como sendo capazes de provar teoremas típicos, formular definições corretas, produzir exemplos de sequências para mostrar falhas em definições incorretas, entre outras. Depois das férias do verão, no primeiro dia de aulas, foi aplicado um teste escrito aos 15 alunos de uma turma solicitando-lhes uma breve narrativa sobre o que se lembravam do conceito de limite de uma sucessão, onde deveriam incluir uma descrição de uma sucessão em termos intuitivos ou informais, e a sua definição formal precisa. Dos 15 alunos, apenas 1 deu uma resposta que evidenciou uma compreensão mais profunda do conceito. Este aluno respondeu que o limite de uma sucessão é o número a partir do qual todos os termos da sucessão, depois dum certo ponto, variam somente de um pequeno número ε . Os restantes 14 alunos apresentaram conceções próprias inadequadas à definição formal pedida. Para Davis e Vinner o "conceito definição" foi reconstruído tomando como referência o "conceito imagem" de sucessão que, por sua vez, estaria incorretamente formado e portanto resultando numa definição formal incorreta.

De acordo com Cornu (1991) e Monaghan (1991), citado em Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo e Rico (2011), alguns estudos presenciam uma persistência de equívocos relacionados com o limite como sendo um valor inatingível, o que vai ao encontro do que Tall (1993) menciona quando refere que os alunos, regularmente, assumem que o limite nunca é alcançado. A introdução do conceito de limite de uma função como um processo dinâmico ou seja, "$f(x)$ aproxima-se de c à medida que x tende para a" sugere representações mentais verbais como "aproximação", "estar próximo de", "tender para" que podem conduzir o aluno à possibilidade de pensar que $f(x) \neq c$, "propriedade" caracterizada, segundo Tall e Vinner (1981) como um fator de conflito potencial. O estudo efetuado por Cornu (1991) revelou que a palavra limite apresentava significados diferentes, para alunos diferentes, em momentos diferentes. A maior parte das vezes a palavra limite era considerada como um ponto do qual nos aproximamos sem o atingir (o que leva o aluno a poder pensar que $f(x) \neq c$); um ponto do qual nos aproximamos e atingimos, entre outros. Assim, o estudo revela que o significado das palavras variava de um aluno para o outro, e a mesma palavra podia ter vários significados para um mesmo aluno, dependendo das situações (Cornu, 1991).

O processo de limite não é explícito, ou seja, rompe de certa maneira com a experiencia prévia dos alunos no manuseamento de algoritmos aritméticos e algébricos que, por sua vez, são explícitos. A existência de técnicas particulares e rotineiras para calcular o limite de determinadas funções conduzem os alunos a adotá-las facilmente, sem que isso signifique a compreensão do conceito (Fernández-Plaza, 2011). Este resultado também se pode constatar quando Tall (1993) refere que muitos estudantes (e alguns professores) preferem separar as dificuldades que a teoria possa transportar optando, assim, por envolver os métodos práticos adequados na resolução das tarefas propostas. O aluno pode resolver um exercício para calcular um limite utilizando determinados procedimentos algébricos, como por exemplo, a soma, o produto, ou substituições diretas, contudo esse procedimento muitas das vezes aplicado de forma correta, não significa a compreensão do conceito, conforme é revelado por Cornu (1991). Assim, a compreensão do conceito de limite é distinta do procedimento algébrico que leva à obtenção do seu resultado. As investigações já realizadas evidenciam que os alunos preferem estratégias dominantes de procedimentos algébricos, que usualmente são propostos nos testes/exames, e não na compreensão do conceito, o que leva a uma reconstrução do conhecimento a um nível mais exigente, conforme menciona Tall (1993) quando refere que "Torna-se evidente que quando [o "fator de conflito potencial"] entra em conflito com a definição formal, o "conceito imagem", firmemente detido, é notoriamente difícil de desalojar" (Tall, 1993, p. 16).

A esquematização (Quadro III) elaborada por Juter (2008) descreve parte da estrutura do "conceito imagem" do limite, onde foram identificadas as dificuldades mais frequentes na compreensão deste conceito. Na esquematização podem ser constatadas as interseções das dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de limite de funções racionais, e parte do "conceito imagem" de derivada; que são dois dos contextos abordados neste estudo.

Os diferentes significados que os alunos vão construindo ao longo da sua aprendizagem indicam os “fatores de conflito cognitivo” (dificuldades) e revelam o nível (1.º, 2.º ou 3.º “mundo”) de aprendizagem em que se encontram. Por exemplo, os alunos que não conseguirem estabelecer a ponte do “2.º mundo” para o “3.º mundo” aplicarão rotinas de manipulação algébrica que resultarão numa possível resolução correta, mas sem compreensão do conceito (compreensão instrumental).

Conforme refere Tall (1993) e Juter (2008) é essencial que o aluno reconheça uma função como um processo e não como um objeto que permite determinados procedimentos algébricos, pois esta última situação poderá gerar um fator de conflito potencial, no estudo dos limites de uma função. Caso o aluno não reconheça uma função como um processo dinâmico entre a variável dependente e independente, certamente terá dificuldade em compreender, igualmente, o processo dinâmico de limite (“se *x* tende para *a*, então *f(x)* aproxima-se de *b*”).

Com o objetivo de caracterizar o “conceito imagem” de função dos alunos do 10.º e 11.º ano, após terem estudado o tema, Vinner (1983, 1991) utilizou um questionário que foi administrado a 147 alunos, considerados como bons alunos, das escolas de Jerusalém. Foi ensinado a todos os alunos que uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que faz corresponder a cada elemento do primeiro conjunto um e um só elemento do segundo. O estudo revelou que entre um terço e dois terços dos alunos consideraram que uma função deve ser dada por uma regra. Se forem dadas duas regras para dois domínios disjuntos estaremos perante duas funções. Se a correspondência for arbitrária, os alunos consideram que poderemos estar perante uma infinidade de funções onde cada número tem a sua própria regra de correspondência. Para alguns destes alunos é possível que uma função seja dada por várias regras relacionadas com domínios disjuntos, desde que esses domínios sejam partes da reta real ou intervalos. Mas, se na correspondência há apenas um ponto que é exceção, a função poderá já não ser considerada como função. Há ainda outros alunos a considerar que se as correspondências não são dadas por uma regra algébrica, não são funções, a menos que a comunidade dos matemáticos as considerem como tal, dando-lhe um nome ou uma notação especial. Cerca de dois quintos dos alunos consideram que o gráfico de uma função deve ser regular, simétrico, persistente, ou crescer e decrescer de forma razoável. Por fim, há um grupo de alunos que considera que uma função é uma correspondência um a um. Vinner considera que esta abordagem resulta da distorção da definição de função, como resultado daquilo a que ele chama de uma tendência implícita para a simetria: se para um x do domínio há apenas um y no contradomínio, então o contrário também deve ser verdadeiro.

A construção do "conceito imagem" de limite tem como objetivo conduzir o aluno, de forma intuitiva, à compreensão da definição formal de limite. Em geral, a primeira abordagem ao conceito de limite é introduzida com a diferenciabilidade porém, quando os alunos aprendem os procedimentos de derivação; regras de derivação, o conceito de limite é "esquecido" fazendo com que este recue para segundo plano (Tall & Vinner, 1981). Para estes autores, desta situação podem ocorrer fatores de conflito cognitivo quando, mais tarde, os alunos estudarem a definição formal de limite porque podem não ter o "conceito imagem" de limite construído de forma consistente. Este aspeto pode ser ultrapassado através da prática de um ensino que contemple uma aprendizagem ativa, onde a compreensão do conceito de limite se sobrepõe à agilidade na sua manipulação algébrica.

2.5 Articulação entre o conceito de derivada e o conceito de limite

A introdução do conceito de limite, no momento em que é introduzida a diferenciabilidade faz com que o "conceito imagem" do limite inclua a representação mental gráfica de uma corda a tender para uma tangente, conforme refere Tall e Vinner (1981). Por outro lado, o "conceito imagem" é uma estrutura cognitiva composta por vários elementos e, segundo Hiebert e Lefevre (1986) o "conhecimento concetual" está definido como o conhecimento das várias relações estabelecidas por distintas parcelas de informação. Ainda segundo os mesmos autores, se um "conceito imagem" de um determinado conceito inclui uma variedade significativa de "conhecimento concetual", ou seja, se inclui muitas parcelas de informação, a sua estrutura poder-se-á considerar como forte. Um elevado nível de "conhecimento concetual" assegura fortes conexões entre os vários "conceito imagem" de cada conceito. É também nesta situação que podemos constatar a importância da utilização, em sala de aula, das várias representações (R3). Estas não só contribuem para um "conceito imagem" consistente de um conceito, conforme referido anteriormente, como também podem contribuir na forte conexão entre os vários "conceito imagem" de cada conceito. Quero com isto dizer que caso o aluno consiga estabelecer ligações entre a representação numérica (tabela) da função derivada $f'(x)$ (inserida no conceito de derivada) e a representação gráfica da função $f(x)$ (inserida no conceito de função) está a construir dois "conceito imagem" consistentes que são independentes, porque são referentes a conceitos distintos.

O nível de coerência do "conceito imagem" pode ser analisado pela ausência, ou não, de processos "erróneos" que os alunos detêm, isto é, quando partes constituintes do "conceito imagem" geram ou não conflitos. Algumas investigações apresentaram resultados referentes ao nível de coerência do "conceito imagem" de limite que alguns alunos detêm. Entre as várias investigações, encontra-se um estudo realizado por Junter (2008) onde é analisado o trabalho de um aluno que possuía o "conceito imagem" de limite de funções racionais estritamente ligado com o conceito de derivada. O aluno abordava o conceito de limite como sendo o foco principal na resolução de problemas ignorando, assim, a teoria que lhe é inerente. Desta forma, o aluno pensou que o valor do limite de uma função só poderia ser calculado caso estivesse a resolver um problema, o que fez com que não se envolvesse em discussões teóricas e não atingisse o 3.º "mundo" (O 3.º "mundo" é o "mundo formal" onde as propriedades são expressas através de definições formais como axiomas). Este aluno não compreendia a noção de limite, mas era capaz de resolver tarefas de rotina, o que denota uma compreensão instrumental do conceito de limite. Um outro aluno, com um "conceito imagem" de limite estritamente ligado à diferenciabilidade identificava o limite como inatingível, que se pode considerar um fator de conflito potencial, quando participava em discussões teóricas.

Os exemplos atrás referidos ilustram como uma articulação sólida entre o conceito de derivada e o conceito de limite é indispensável revelando que a conexão entre estes dois conceitos é considerada fundamental, na compreensão do conceito de limite.

Conforme refere Junter (2008), estudar a teoria dos limites requer competências em distintas e inúmeras áreas da Matemática. Ao nível do 11.º ano, por exemplo, é de referir não só outra área da Matemática mas também a área da Física. Na disciplina de Físico-química a derivada assume, essencialmente, a velocidade instantânea de um corpo em movimento.

Os alunos devem ser capazes de compreender exposições formais, significados de valores e estabelecer conexões entre a teoria e a resolução de problemas, o que significa a posse de consistentes "conceito imagem". Para que o “conceito imagem” de cada conceito seja consistente são necessárias competências ao nível da abstração e estabelecer robustas conexões entre numerosos tópicos da Matemática onde estão incluídos numerosos “conceito imagem” (Junter, 2008), como por exemplo, o “conceito imagem” de derivada e o “conceito imagem” de limite.

CAPÍTULO 3 – A UNIDADE DE ENSINO

Este capítulo diz respeito à minha intervenção letiva efetuada numa turma do 11.º ano na Escola Secundária da Ramada, no período de 13 e 23 de abril, na UE taxa de variação e derivada do 11.ºano de escolaridade.

As suas seções fazem referência: (1) à caracterização da escola e da turma (2) ancoragem da subunidade de ensino no programa (ME, 2001) (3) aos conceitos teóricos lecionados que foram, entre outros, o conceito de derivada e o de limite; (4) à planificação e estratégias de ensino adotadas; (5) às tarefas realizadas em sala de aula (tarefas de natureza exploratória, problemas e exercícios do manual); (6) à avaliação das aprendizagens que recaiu numa avaliação formativa e na avaliação sumativa do teste de avaliação, e por último (7) à síntese das aulas lecionadas.

3.1 Caracterização da escola e da turma

Este estudo foi realizado na escola Secundária da Ramada no ano letivo de 2014/15, numa turma do 11.º ano de Matemática A, do curso de Ciências e Tecnologias.

A Escola Secundária da Ramada está situada na União das Freguesias de Ramada e Caneças, concelho de Odivelas, que é constituída por núcleos habitacionais antigos, alguns bairros recentemente construídos e urbanizações, também recentes, e outras em construção. O núcleo populacional desta região continua em crescimento. Esta freguesia detém um número significativo dos seus habitantes em idade adulta, com capacidade de trabalho, e a maioria dos jovens já frequenta o ensino superior.

Atualmente, a Escola possui equipamento informático e multimédia em todas as salas de aula, o que possibilita o uso generalizado das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

A origem socioeconómica dos alunos matriculados na Escola é bastante heterogénea.

A turma do 11.º ano iniciou o ano letivo com vinte e oito alunos finalizando o segundo período, momento da intervenção letiva realizada, com trinta e um alunos dos quais seis eram repetentes, dois assistentes e um aluno com Necessidades

Educativas Especiais. No final do ano letivo a turma conserva vinte e nove alunos inscritos dado que dois alunos anularam a matrícula, cuja média das idades é de dezasseis anos, sendo catorze rapazes e quinze raparigas.

Segundo a opinião da Professora Cooperante, Prof.ª Inês Campos, os alunos participam ativamente nas discussões coletivas, são persistentes no seu trabalho, têm gosto pela disciplina de Matemática mas é-lhes fundamental o constante "feedback" do professor, o que evidencia motivação para a aprendizagem da disciplina de Matemática mas moderada autonomia, respetivamente (Figura 2).

Alunos inscritos no final do ano letivo 2014/15 (29)

Participação	Não satisfaz		Satisfaz		Bom	
Comportamento	Não satisfaz		Satisfaz		Bom	
Atitudes e valores	Não satisfaz		Satisfaz		Bom	
Desempenho	Baixo		Médio 1/3 (Aprox.) da turma com muitas dificuldades.		Alto	
Classificação Global (0 a 20 valores / N.º Alunos	0-4	5-7	8-10	11-13	14-16	17-20
	0	4	4	6	10	5
Outras	• Participam ativamente nas discussões coletivas. • Trabalham regularmente a pares. • São persistentes. • É fundamental o constante "feedback" do Professor e solicitam-no muito. • Têm gosto pela disciplina de Matemática. • Seis alunos repetentes, dois assistentes e um aluno com NEE.					

Figura 2 - Caracterização da turma, reportada pela Profª Inês Campos

A turma está habituada a realizar trabalho autónomo, a pares. De forma geral e conforme o que assisti ao longo do ano letivo, os novos conceitos são introduzidos pela professora no quadro, seguindo-se a resolução de exercícios práticos de aplicação com a professora, no quadro, favorecendo a intervenção oral dos alunos. Nas aulas subsequentes e após compreensão dos conceitos, os alunos realizam trabalho autónomo a pares resolvendo os exercícios do manual ou fichas previamente elaboradas pela professora. Os momentos de discussão, que geralmente ocorrem após resolução das tarefas, são sempre bastante dinâmicos podendo-se observar um grau de participação e envolvência dos alunos bastante elevado. Em geral os alunos não demonstram receio em colocar questões e explicitar as suas dificuldades, o que vai ao encontro do grau de participação presenciado. Conforme constatei, ao longo do ano letivo, a maior parte dos alunos solicita a resolução, no quadro, de exercícios para consolidação de conhecimentos, evidenciando tendência para adquirir prática de procedimentos algébricos. Pude constatar, igualmente, que apenas uma pequena parte dos alunos apresenta tendência para estabelecer conexões entre os campos da Matemática nos seus diversos conteúdos. No final da aula é habitual a professora propor trabalho para realizar em casa que é correspondido pelos alunos de forma satisfatória. O contato dos alunos com a professora também se estabelece via "Email" da turma, permitindo o esclarecimento de algumas dúvidas que possam ocorrer na elaboração dos trabalhos realizados fora do tempo letivo.

Na semana da Matemática, atividade anual habitual na escola e decorrida no 3.º período, todos os alunos se mostraram muito envolvidos na organização do evento, bem como na participação dos jogos propostos, que é "uma tarefa igualmente importante e com larga tradição no ensino da Matemática" (Ponte, 2005,p. 20). O gosto demonstrado pelos alunos, para além de demonstrar um vínculo emocional com a escola e com a disciplina de Matemática, poderá ser indicador de uma possível estratégia de ensino do professor em sala de aula, caso os jogos selecionados pelo mesmo proporcionem uma exploração a aspetos matemáticos.

No final de todos os períodos os alunos responderam a um questionário, proposto pela Profª Inês Campos, incógnito, ou não, conforme opção do aluno, no sentido de refletirem sobre a metodologia de ensino praticada (Figura 3), o seu trabalho desenvolvido na disciplina (Figura 4), estratégias implementadas, e instrumentos de avaliação praticados pela professora. Após tratamento dos dados, referentes a todos os períodos, passo a apresentar o seu resultado:

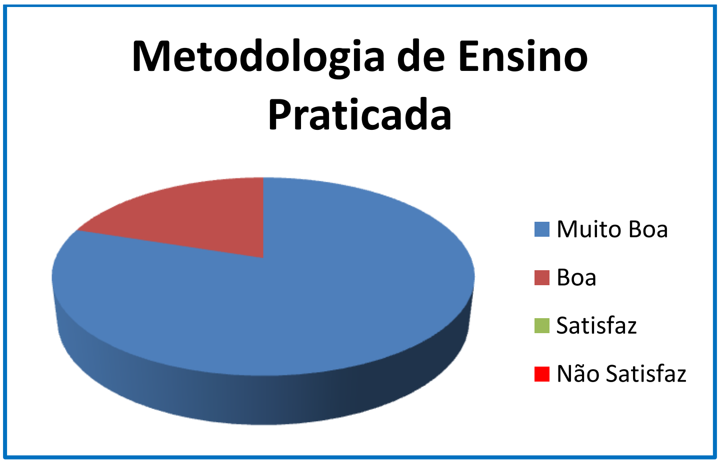


Figura 3 - Opinião da turma acerca da metodologia praticada durante o ano letivo

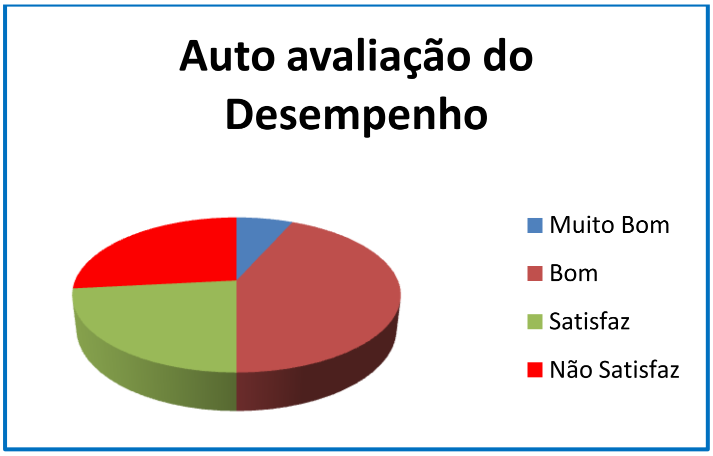


Figura 4 - Auto avaliação da turma

Toda a turma faz referência positiva ao trabalho autónomo a pares realizado nas aulas, aos momentos de discussão e à resolução de problemas.

Três alunos obtiveram no 1.º período uma avaliação sumativa diferente da que consideraram na sua autoavaliação (dois alunos em menos 1 valor e um aluno em mais 1 valor), o que evidencia que a turma foi concordante com a avaliação atribuída pela professora bem como denota que os alunos atribuem um significado adequado ao que estão a aprender, o que reflete uma opinião consciente.

No final do ano letivo as classificações dos alunos, na disciplina de Matemática A (Figura 5), situam-se entre os cinco e os dezassete valores mantendo-se esta situação estacionária em relação ao 1.º e 2.º períodos.

Dos vinte e nove alunos inscritos, sete alunos obtiveram classificação negativa, não tendo transitado para o 12.º ano, e vinte e dois alunos positiva.

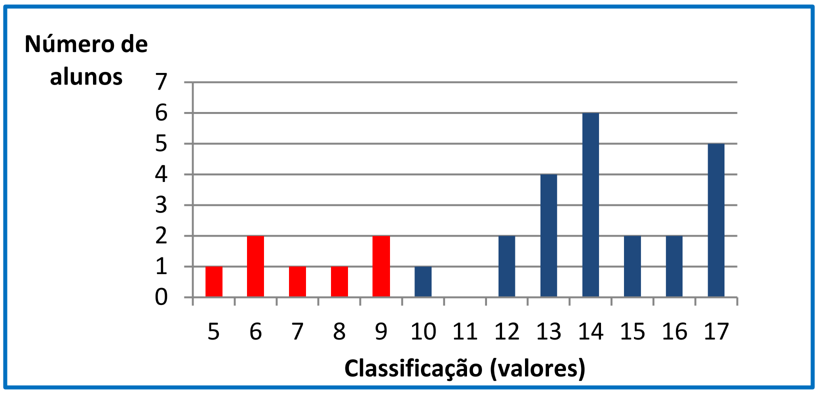


Figura 5 - Classificações da turma, no final do ano letivo, a Matemática

A média da classificação da turma, no final do ano letivo é aproximadamente de 12,7.

Durante o ano letivo, todos os alunos foram bastante acolhedores à minha presença em sala de aula mostrando-se muito afáveis o que favoreceu, entre outros aspetos, o relacionamento professor/aluno/alunos.

Da observação das aulas que assisti, que participei, bem como nas que lecionei realço, de modo gratificante, que uma parte significativa dos alunos revelou uma persistente vontade de participar nas discussões em turma, um ritmo de trabalho constante durante o tempo de aula, vontade de ir ao quadro resolver as tarefas propostas bem como, após resolução, expor publicamente o seu raciocínio.

O questionário de autoavaliação proposto, no final de cada período, pela Prof.ª Inês Campos, incluía uma questão referente à opinião dos alunos em relação às aulas por mim lecionadas; antes, durante e depois da minha intervenção bem como a minha participação em sala de aula das que não lecionei. As respostas dos alunos, de modo geral, evidenciam que, na minha função profissional de Professora de Matemática, houve uma evolução gradual positiva.

3.2 Ancoragem da subunidade de ensino no programa da disciplina

A prática letiva incidiu no tema II - "Introdução ao cálculo diferencial I, funções racionais e com radicais e taxa de variação e derivada" (ME, 2001, p. 5) no tópico taxa de variação e derivada. Porém, este estudo foca ainda alguns aspetos abordados no tema III - "sucessões reais" (ME, 2001, p. 8) do programa de Matemática A para o 11.º ano de escolaridade, atendendo à sua articulação com o tema anterior.

No 10.º ano de escolaridade os alunos desenvolvem o estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos, particularmente no caso da função quadrática e funções polinomiais (graus 3 e 4) bem como a decomposição de polinómios em fatores. No tema da Geometria analítica os alunos estudam a equação vetorial e reduzida da reta, no plano e no espaço, onde o estudo do declive da mesma está presente.

No 11.º ano de escolaridade, os alunos iniciam o estudo da Análise Infinitesimal "interpretando fenómenos e resolvendo problemas recorrendo a gráficos, por via intuitiva, analítica e usando calculadora gráfica” (ME, 2001, p. 4), adquirindo conhecimentos através de uma “aproximação gradual dos conceitos de continuidade, derivadas e limites” (ME, 2001, p. 4).

O tópico que antecedeu a prática letiva foi o de “funções racionais e com radicais” onde, recorrendo à resolução problemas, foram exploradas as propriedades das funções do tipo $f(x) = \frac{a+b}{cx+d}, com\ cx + d \neq 0$. A “aproximação experimental da noção de limite” (ME, 2001, p. 9) foi pela primeira vez abordada, este ano, no estudo das assíntotas de funções racionais.

Referindo o programa de Matemática A do Ensino Secundário (ME, 2001) e estabelecendo o elo de ligação do mesmo com a utilização das três representações (R3) na UE, interessa realçar que:

> A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista - gráfico, numérico e algébrico - sobre tipos simples de funções, desde as algébricas inteiras (que são as tratadas no 10.º ano), passando pelas fracionárias [11.º ano] e acabando nas transcendentes - exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas [12.º ano]. Neste grande tema, será realizada uma abordagem ao cálculo de variações e de limites, bem como ao estudo da continuidade, sem recurso inicial às definições simbólicas rigorosas. (ME, 2001, p. 2)

Os objetivos específicos de aprendizagem do tópico funções racionais e com radicais, tópico antecedente ao tópico lecionado, são “compreender a noção de limite lateral, finito e infinito… reconhecer, após compreensão, as assintotas de uma função e limites nos ramos infinitos ” (ME, 2001, p. 6) o que estabelece a ponte para o conceito de limite no contexto da diferenciabilidade. O programa, nas suas indicações metodológicas indica a necessidade de “propor problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas no 10.º ano, tanto sob os aspetos analíticos como numéricos e gráficos” (ME, 2001, p. 6). Além disso, refere que “As competências de manipulação simbólica e a capacidade de interpretar gráficos podem funcionar em conjunto…[sendo] uma agregação de investigação na sala de aula” (NCTM, 2007, p. 358) indo ao encontro, mais uma vez, da utilização das várias representações (R3- numérica, gráfica e simbólica), na prática letiva.

O programa sugere que “O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva” (ME, 2001, p. 6), o que é favorável à ideia de Tall (1993) quando refere que os alunos devem compreender as ideias fundamentais antes de serem introduzidos os conceitos formais. Desta forma, os alunos vão construindo o "conceito imagem" de limite (onde se insere o "conceito definição") de modo intuitivo e formal.

O estudo da taxa de variação e derivada, tópico da prática letiva, engloba como objetivos específicos a compreensão da noção da taxa de variação, interpretação geométrica da taxa média de variação e respetivo cálculo. Os alunos devem compreender a noção derivada de uma função (generalização) e compreender/determinar (por definição) a expressão algébrica da função derivada.

O programa, nas suas indicações metodológicas, propõem alguns problemas simples que envolvam derivadas num contexto de aplicações.

No tema I, antecedente ao tema da minha intervenção, os alunos estudaram a intersecção, paralelismo e perpendicularidade de retas e planos onde o conceito de tangente a uma circunferência (já abordado no 3.º ciclo) e plano tangente a uma superfície esférica estão presentes.

O tema III, subsequente à intervenção letiva, é o das sucessões reais; sua definição e propriedades. O estudo da sucessão $(1+\frac{1}{n})^n$ e da convergência é iniciado, bem como relembrados os limites infinitamente grandes/pequenos e reais. A este respeito, o programa refere que:

> Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contra exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais conceções alternativas e erradas. (ME, 2001, p. 9)

Este tema III, subsequente ao período da lecionação, também será considerado no estudo, dado o seu pertinente enquadramento na construção do "conceito imagem" de limite e utilização que os alunos efetivam do conceito do mesmo.

Os objetivos específicos do programa (ME, 2001), referentes ao mesmo tema, centram-se na compreensão e justificação da convergência ou divergência de uma sucessão usando a definição ou teoremas o que "abre portas à exploração de sequências e séries finitas e a noções informais de limites" (NCTM, 2007, p. 361).

Como prossecução imediata (12.º ano) das aprendizagens, o programa inclui o estudo das funções exponenciais e logarítmicas, teoria de limites, onde se integra o limite de função segundo Heine, propriedades operatórias, limites notáveis, indeterminações, assíntotas e continuidade. O estudo do Teorema de Bolzano–Cauchy precede o cálculo diferencial que integra o estudo de funções deriváveis (onde são trabalhadas as regras de derivação), teorema da derivada da função composta, segundas derivadas e concavidade.

Os objetivos curriculares são totalmente propícios à ancoragem da fundamentação teórica do estudo e ao seu objetivo, estabelecendo-se assim uma base perfeita para a sua concretização.

O planeamento escolar começou por indicar o início do estudo das funções racionais, a 12 de janeiro, porém somente ocorreu a 23 do mesmo mês e, o estudo da programação linear (incluído no tema I), previamente planeado para iniciar em meados de abril, teve início a 18 de março. Como consequência deste desfasamento temporal e da replanificação escolar, o tópico da taxa de variação e derivada onde recai a minha intervenção, teve lugar no começo do terceiro período ou seja a 2 de abril.

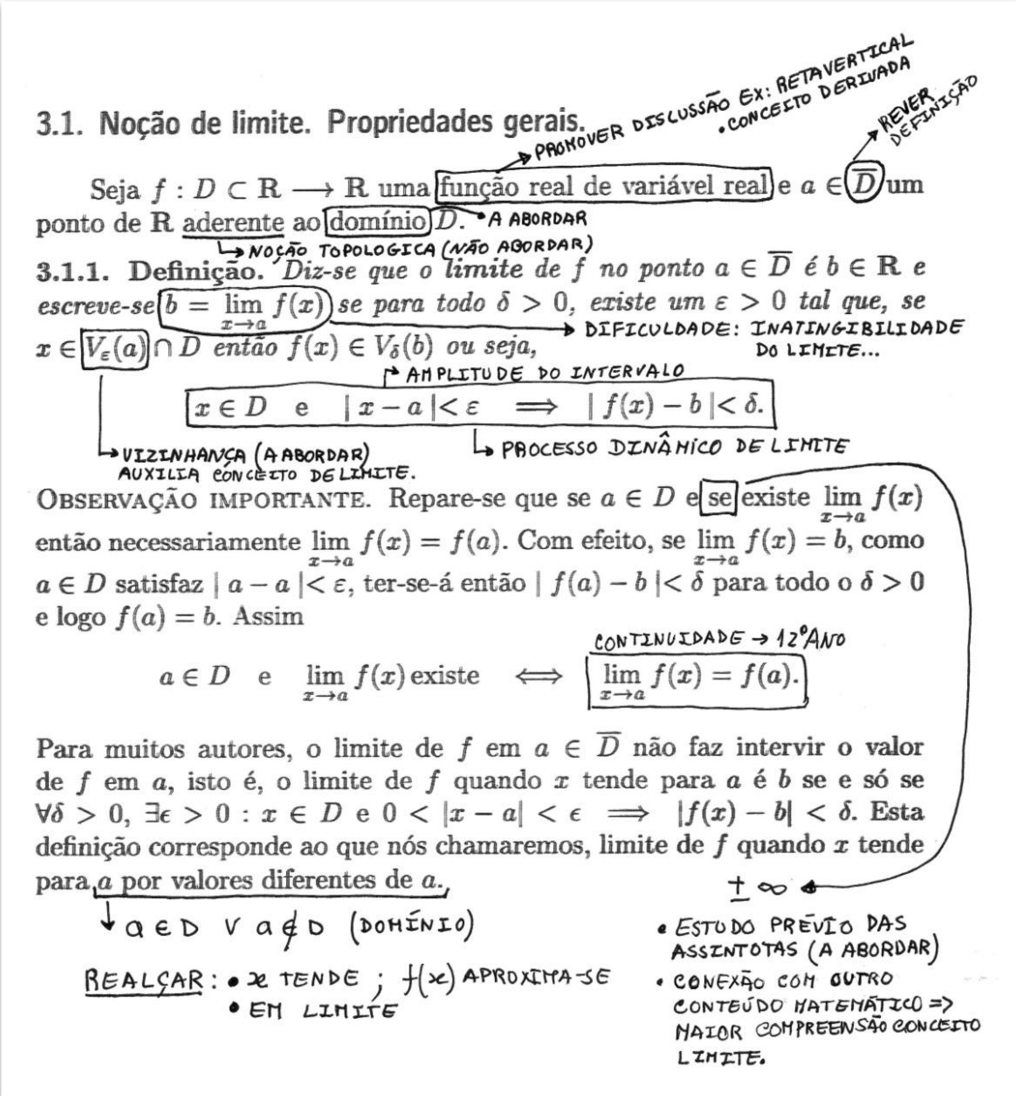
3.3 Conceitos teóricos

Nesta secção serão abordados os conceitos matemáticos mais relevantes referentes aos conteúdos trabalhados na intervenção letiva tendo em vista a componente de lecionação e de cariz investigativo, bem como, a sua "complementação de modo integrado reforçando a interdisciplinaridade e a conexão entre as diferentes áreas da Matemática", conforme objetivo do mestrado em matemática para professores lecionado pela FCUL.

Este subcapítulo surge pela importância que atribuo ao conhecimento aprofundado do conteúdo matemático que o professor deve ter, não só do que leciona mas também do subsequente. Assim, o professor poderá mais facilmente antecipar possíveis processos "erróneos" de raciocínio matemático que os alunos possam construir perante algumas tarefas, como por exemplo, a construção de um fator de conflito cognitivo que possa gerar dificuldade com a definição formal de derivada no ponto x do seu domínio.

O conhecimento especializado do professor acerca das aprendizagens futuras dos alunos também permite sequenciar os conteúdos a lecionar, prever possíveis dificuldades e distintas estratégias de resolução; a incluir nos planos de aula. Este último aspeto pode interferir na avaliação do trabalho do aluno pois, segundo a minha opinião, o professor deve avaliar o processo de raciocínio do mesmo, que pode abranger distintos caminhos de resolução, e não somente o resultado final apresentado. Ainda neste âmbito, destacando a vantagem do conhecimento científico que o professor deve deter em contexto de sala de aula, surge-me a seguinte questão: Como poderá o professor motivar discussões proveitosas sobre as múltiplas formas de resolver um problema se só o souber resolver de uma única forma? Na minha opinião, e na tentativa de responder a esta questão penso que o professor deverá compreender corretamente os conceitos mas também o que os fundamenta, o que exige um aprofundamento dos conteúdos científicos envolvidos.

Na preparação das aulas que lecionei revi atentamente a definição formal de limite, com o intuito de prever os possíveis fatores de "conflito potencial" que pudessem entrar, nas aprendizagens futuras dos alunos, em conflito com a definição formal de limite já que, Tall e Vinner (1981) os caraterizam como sendo o tipo mais grave de "conflito potencial". Assim, realcei (notas manuscritas na Figura 6) alguns dos aspetos que me pareceram mais relevantes de causar futuros conflitos cognitivos tendo em conta, o nível de conhecimento dos alunos, o ano de escolaridade que lecionei e algumas das dificuldades reportadas na fundamentação teórica.



3.1. Noção de limite. Propriedades gerais.

PROMOVER DISCUSSÃO EX: RETA VERTICAL
• CONCEITO DERIVADA

REVER DEFINIÇÃO

Seja $f : D \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função real de variável real e $a \in \overline{D}$ um ponto de $\mathbf{R}$ aderente ao domínio D. • A ABORDAR

NOÇÃO TOPOLOGICA (NÃO ABORDAR)

3.1.1. Definição. *Diz-se que o limite de f no ponto $a \in \overline{D}$ é $b \in \mathbf{R}$ e escreve-se* $\boxed{b = \lim_{x \to a} f(x)}$ *se para todo $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, se $x \in \boxed{V_\varepsilon(a)} \cap D$ então $f(x) \in V_\delta(b)$ ou seja,*

DIFICULDADE: INATINGIBILIDADE DO LIMITE...

AMPLITUDE DO INTERVALO

$$\boxed{x \in D \quad \text{e} \quad |\, x - a \,| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |\, f(x) - b \,| < \delta.}$$

VIZINHANÇA (A ABORDAR) AUXILIA CONCEITO DE LIMITE.

PROCESSO DINÂMICO DE LIMITE

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE. Repare-se que se $a \in D$ e se existe $\lim_{x \to a} f(x)$ então necessariamente $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Com efeito, se $\lim_{x \to a} f(x) = b$, como $a \in D$ satisfaz $|\, a - a \,| < \varepsilon$, ter-se-á então $|\, f(a) - b \,| < \delta$ para todo o $\delta > 0$ e logo $f(a) = b$. Assim

CONTINUIDADE → 12ºANO

$$a \in D \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Para muitos autores, o limite de f em $a \in \overline{D}$ não faz intervir o valor de f em a, isto é, o limite de f quando x tende para a é b se e só se $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : x \in D$ e $0 < |x - a| < \epsilon \implies |f(x) - b| < \delta$. Esta definição corresponde ao que nós chamaremos, limite de f quando x tende para a por valores diferentes de a.

$\pm\infty$

$a \in D \vee a \notin D$ (DOMÍNIO)

REALÇAR: • x TENDE ; $f(x)$ APROXIMA-SE
• EM LIMITE

• ESTUDO PRÉVIO DAS ASSINTOTAS (A ABORDAR)
• CONEXÃO COM OUTRO CONTEÚDO MATEMÁTICO => MAIOR COMPREENSÃO CONCEITO LIMITE.

Figura 6 - Definição de limite, arquivo pessoal

Ao aprofundar a definição de limite recapitulei algumas definições topológicas envolvidas na mesma donde sobressaiu a importância de atribuir significado, em sala de aula, à vizinhança de um ponto.

Seja $c \in R$. Chamamos vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ do ponto c ao intervalo $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$, que designaremos por $V_\varepsilon(c)$. A qualquer conjunto V que contenha uma vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ do ponto c chama-se uma vizinhança de c. Chamam-se noções topológicas a todas as noções que se podem exprimir na noção de vizinhança de um ponto.

Seja $X \subset R$ e $c \in R$. Diz-se que c é interior a X se existe uma vizinhança $V_\varepsilon(c) \subset X$. Diz-se que c é exterior a X se c for interior a R/X, o que é equivalente a dizer que existe uma vizinhança de c que não interseta X. O ponto c diz-se fronteiro a

X se c não for interior ou exterior a X. Assim, $c \in R$é fronteiro a X se e só se toda a vizinhança de c interseta X e R/X. O ponto c diz-se aderente a X se qualquer vizinhança de c interseta X.

O conjunto dos pontos interiores a $X \subset R$ chama-se interior de X e representa-se por $int(X)$. O conjunto de pontos exteriores a X chama-se exterior de X e representa-se por $ext(X)$. O conjunto dos pontos fronteiros a X chama-se fronteira de X e representa-se por $fr(X)$. O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se aderência de X ou fecho de X e representa-se por $\bar{X}$.

Das definições anteriores, em particular, resulta que:

$\bar{X} = X \cup fr(X) = int(X) \cup fr(X)$, podendo justificar-se atendendo a que $c \in \bar{X}$ é equivalente a afirmar que qualquer vizinhança de c interseta X, o que é equivalente a dizer que $c \notin ext(X)$ e assim (porque $int(X) \cup ext(X) \cup fr(X) = R$, sendo os conjuntos $int(X)$, $ext(X)$, $fr(X)$ disjuntos dois a dois) $c \in int(X) \cup fr(X) = X \cup fr(X)$.

Neste estudo algumas questões das tarefas propostas motivaram, no momento da discussão em turma, abordagens a novas aprendizagens, como por exemplo, a exploração do significado de "vizinhança" de um ponto (efetuado na 5.ª aula lecionada); essencial para a compreensão do conceito de limite bem como as propriedades gerais de "limite e continuidade", pelo que as revisitei na demonstração subsequente (Figura 7).

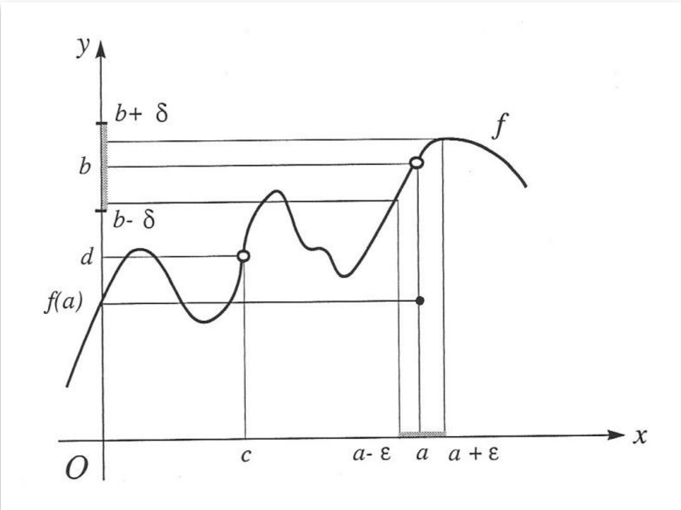


Figura 7 - Limite e continuidade

Na Figura 7, f não tem limite em $a \in D$ ($f(a) \notin V_{\delta}(b)$), mas tem limite em $c \in \overline{D} \backslash D$: $\lim_{x \to c} f(x) = d$.

Proposição: Sejam $f, g: D \subset R \to R$ funções reais de variável real e $a \in \overline{D}$.

1. Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então é único (unicidade do limite).

2. Se $f(x) = g(x)\ \forall x \in V_{\epsilon}(a) \cap D$ e existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então $\lim_{x \to a} g(x)$ existe e tem-se: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$.

3. Se $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que: $f(x) < g(x)\ \forall x \in V_{\epsilon}(a)$.

4. Se $f(x) \leq g(x) \forall x \in V_{\epsilon}(a) \cap D$, então $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$, caso existam os limites considerados.

5. Se $h(x) \leq f(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in V_{\epsilon}(a) \cap D$ e se $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x)$.

Demonstração: Comecemos por ver 1 (unicidade do limite).

Tendo-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{x \to a} f(x) = b'$, para cada δ>0, existe ε>0 tal que:

$$|f(x) - b| < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad |f(x) - b'| < \frac{\delta}{2}$$

desde que $x \in D\ e\ |x - a| < \varepsilon$; escolhendo um $x \in D$ nestas condições (o qual existe já que $a \epsilon \overline{D}$) tem-se:

$$|b - b'| = |b - f(x) + f(x) - b'| \leq |f(x) - b| + |f(x) - b'| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

para todo o δ>0, o que implica que $b = b'$.

A demonstração de 2 e 5 resulta facilmente da definição de limite e 4 é consequência imediata de 3, que passamos a demonstrar:

Seja $\lim_{x \to a} f(x) = b < \lim_{x \to a} g(x) = c$ e escolha-se $\delta: 0 < \delta < \frac{c-b}{2}$ $(portanto\ b + \delta < c - \delta)$. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para $x \in V_{\varepsilon}(a) \cap D$, se tem $b - \delta < f(x) < b + \delta\ e\ c - \delta < g(x) < c + \delta$ portanto, em particular, $f(x) < b + \delta < c - \delta < g(x), \forall x \in V_{\varepsilon}(a) \cap D$.

Compreender uma demostração matemática ajuda o professor a estabelecer conexões entre a matéria que leciona e as futuras aprendizagens dos alunos, porque desta forma, entre outras, o professor mais facilmente consegue prever quais os conhecimentos base mais relevantes que os alunos devem aprender. Deste modo, o professor poderá evitar alguns conflitos cognitivos em aprendizagens futuras.

Perspetivar um ensino eficaz envolve saber o que os alunos sabem, o que não sabem e criar alicerces sólidos para a prossecução de aprendizagens futuras. Passo a exemplificar esta ideia com a questão 3 da Tarefa 3 (Supõe que a velocidade instantânea da caixa em qualquer intervalo de tempo $[x,\ x+h]$ é 0,7 m/min. Escreve uma expressão algébrica da função $f(x)$ que descreva a subida do equipamento, nestas condições). Esta questão propõe a abordagem à exploração da técnica de primitivação, a ser introduzida numa unidade curricular de análise Matemática no ensino superior. A sua elaboração teve por base a definição de primitiva, que passo a indicar:

Definição de primitiva – Sejam I um intervalo de R que contenha mais de um ponto e $f\colon I \to R$. Chama-se primitiva de *f* em *I* a qualquer função $F\colon I \to R$ tal que $F'(x) = f(x)$ para qualquer $x \in I$. Diz-se que *f* é primitivável em *I* quando *f* possui pelo menos uma primitiva em *I*.

Recapitular o conceito de derivada enriqueceu, entre muitos outros aspetos, a abordagem à História da Matemática (5.ª aula lecionada), outras nomenclaturas de derivada (2.ª aula lecionada) e perspetivar o estudo mais aprofundado das derivadas laterais de uma função num ponto que graficamente foram exploradas aquando a aprendizagem dos pontos angulosos de uma função (Tarefa 5, questão 2). O devido "alerta" efetivado nas fotocópias das regras de derivação distribuídas aos alunos na 5.ª aula lecionada ("**Atenção no uso da calculadora**, por vezes dá resultados errados. Por exemplo para $f(x)\ = |x-2|+1$. A calculadora apresenta o valor *0* para $f'(2)$ mas não existe derivada no ponto $x=2$ (ponto anguloso) ") foi uma das consequências de consultas teóricas efetuadas.

Um aspeto importante, entre muitos, foi o enfase que atribui, em sala de aula, à noção de derivada de uma função num ponto realçando que esta tem um carácter local, isto é, depende apenas do comportamento da função numa vizinhança (arbitrariamente pequena) do ponto x do domínio da função. Para elucidar o atrás referido passo a indicar algumas das noções Matemáticas que revisitei:

Deve-se a Cauchy a formulação clássica da noção de derivada por volta de 1823 nos termos seguintes: Seja I um intervalo de R com mais de um ponto. Diz-se que $f\colon I \to R$ é diferenciável ou tem derivada no ponto $a \in I$ quando existir e for finito o limite: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. À função $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ definida em $I\backslash\{a\}$ chama-se razão incremental de *f* no ponto a e ao valor do limite chama-se derivada de *f* em a e representa-se por $f'(a),\ Df(a)\ ou\ \frac{df}{dx}(a)$. Assim $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou fazendo a mudança de variável $x = a + h,\ \ f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Quando existir e for finito, $f'(a^+) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, diz-se que f tem derivada à direita no ponto a, e o seu valor representa-se por $f'(a^+)$. Analogamente à esquerda. O símbolo para a derivada esquerda é $f'(a^-)$. É claro que uma função diferenciável num ponto interior de *I* tem derivadas à direita e à esquerda nesse ponto e estas são iguais. Pode no entanto acontecer que uma função tenha derivada à direita e à esquerda no ponto *a* e não seja diferenciável em *a*, como o caso de $f(x) = |x|$, onde os limites laterais não coincidem não existindo $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x}$ o que mostra que *f* não é diferenciável no ponto *a=0.*

Após exploração e compreensão dos conceitos em sala de aula, a definição de derivada e t.m.v [a, b] foram introduzidas conforme reportam os slides projetados em sala de aula (Anexo V) e de acordo com o manual escolar selecionado pela escola. Revisitei outras definições tais como tangente, variação de uma função num intervalo [a, b], entre outras, de forma a estabelecer a articulação necessária entre aprendizagens anteriores dos alunos com as do tema lecionado. Quero com isto dizer que, como por exemplo, a definição de tangente lecionada no 3.º ciclo ("A reta tangente a uma circunferência num ponto é definida como a reta que interseta a circunferência <u>exatamente, e só, nesse ponto</u>") foi complementada com a noção de derivada aprendida no período de lecionação ("A definição de reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abcissa x_0 pertencente ao seu domínio, é a reta que passa no ponto $P(x_0, f(x_0))$ <u>e tem como declive a derivada de f em x_0").</u>

No tema das sucessões reais de variável real, onde se inclui parte deste estudo, e para me auxiliar a perspetivar algumas aprendizagens revisitei as definições que se seguem:

Uma sucessão (v_n) diz-se um infinitamente grande positivo $(v_n) \to +\infty)$ se, para todo o número real L que se considere, existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores que L ($\forall L \in R,\ \exists p \in N\colon n > p => v_n > L$). Uma sucessão (u_n) diz-se um infinitamente pequeno (infinitésimo) ou que tende para zero($(u_n) \to 0\ ou \lim(u_n) = 0$) se e só se, para todo o número real positivo δ, existe uma ordem p a partir da qual todos os termos satisfazem a condição $|u_n| < \delta$ $(\forall\delta > 0,\ \exists p \in N: n > p => |u_n| < \delta)$.

Definição de limite pelas sucessões – Sejam $a \in \overline{D}\ e\ b\ \in \overline{R}$. Diz-se que o limite de f em a é b e escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se para toda a sucessão $x_n \in D$ tal que $x_n \to a$, então $f(x_n) \to b$, isto é $x_n \in D, x_n \to a =>\ f(x_n) \to b$.

Ao relembrar de forma mais profunda os conceitos matemáticos envolvidos na componente de lecionação traduziu-se, entre outros aspetos, numa maior confiança na minha capacidade para diligenciar os mesmos de modo articulado em sala de aula, na elaboração das tarefas, na previsão de dificuldades dos alunos e posterior análise e reflexão.

3.4 Planificação da Unidade de Ensino

O planeamento escolar começou por indicar o início do estudo das funções racionais, a 12 de janeiro, porém somente ocorreu a 23 do mesmo mês e, o estudo da programação linear (incluído no tema I), previamente planeado para iniciar em meados de abril, teve início a 18 de março. Como consequência deste desfasamento temporal e da replanificação escolar, o tópico da taxa de variação e derivada onde recai a minha intervenção, teve lugar a 2 de abril, começo do terceiro período.

O período da intervenção estava planeado para 9 a 17 de abril porém, uma serie de atividades escolares obrigaram a que o mesmo se efetivasse num bloco contínuo de cinco aulas, com a duração de 90 min cada, no período de 13 a 23 de abril (Tabela I).

O estudo das sucessões reais teve lugar desde o início de maio até 28 do mesmo mês, sendo esta a penúltima aula do ano letivo.

Tabela I - Planificação da Unidade de Ensino

<table>
<tr><th>Tema II - Tópico Taxa de variação e Derivada</th><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">13 /4 – 1.ª aula 90 min. - Tarefa 1- “Variação e taxa média de variação [a, b]”</td></tr>
<tr><td>• Variação de uma função num intervalo [a,b].
• Taxa média de variação de uma função no intervalo [a,b].</td><td>• Compreender a diferença entre a variação e a taxa média de variação de uma função num intervalo [a,b].
• Interpretar geometricamente a taxa média de variação (declive da reta secante à função que passa nos pontos (a , f(a)) e (b , f(b)) e calculá-la.
• Compreender a relação entre a monotonia e a taxa média de variação de uma função num intervalo [a,b].</td></tr>
<tr><td colspan="2">16/4 – 2.ª aula de 90 min. - Tarefa 2 – “A bola no plano inclinado”</td></tr>
<tr><td>• Taxa de variação também designada por derivada de uma função num ponto.</td><td>• Compreender a noção da derivada de uma função num ponto pertencente ao seu domínio como limite da taxa média de variação. ($\lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$
• Compreender e determinar por definição (recorrendo à noção intuitiva de limite) a expressão algébrica da função derivada.
• Interpretar geometricamente a derivada de uma função num ponto (declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0).</td></tr>
<tr><td colspan="2">17/4 – 3.ª aula de 90 min. - Tarefa 3 - ”A subida da caixa”</td></tr>
<tr><td>• Derivada da função afim por definição (Demonstração).
• Introdução das regras de derivação:
- Derivada da função polinomial de 2º grau e função constante.
- Derivada da soma e diferença de duas funções.
- Derivada de uma função racional do tipo y = $\frac{a}{x}$</td><td>• Compreender e deduzir (recorrendo à noção intuitiva de limite da t.m.v.) a regra de derivação da função afim.
• Caraterizar a função derivada de funções polinomiais de 2º grau, de funções racionais do 1º grau (generalização).</td></tr>
<tr><td colspan="2">20/4 – 4.ª aula de 90 min. - Tarefas 4 e 5 - “Como varia a temperatura” e “Gráfico da função derivada”</td></tr>
<tr><td>• Derivada de uma função num ponto.
• Sinal da função derivada</td><td>• Explorar a relação entre o sinal da derivada e o declive da reta tangente.
• Compreender, explorando a representação gráfica, a relação entre a monotonia e a variação de uma função.</td></tr>
<tr><td colspan="2">23/4 – 5.ª aula de 90 min. - Tarefa 6 - “Piscina no relvado”</td></tr>
<tr><td>• Sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função.</td><td>• Consolidar o conceito de derivada com abordagem ao conceito intuitivo de limite através da exploração de três representações – Gráfica, numérica e simbólica.</td></tr>
</table>

Esta seção surge para dar a conhecer a planificação da UE, mas também pela importância que atribuo à elaboração dos planos de aula. Acredito que “ensinar Matemática, ou qualquer outra disciplina, é um empreendimento complexo que não deve ser deixado apenas ao improviso, ao bom senso ou ao talento individual do professor" (Abrantes, 1985, p. 1). Pela minha ainda pouca experiencia de lecionação, a planificação detalhada das aulas da UE (Anexo II) apresentou-me inúmeras vantagens, das quais destaco: (1) a previsão das dificuldades dos alunos; (2) a definição de prioridades ao nível do grau de pormenor da matéria a lecionar que depende do grau de conhecimentos da turma (por vezes há necessidade de efetuar algumas revisões de conceitos já lecionados) bem como ao nível das capacidades a desenvolver no conteúdo fundamental a lecionar como por exemplo a noção do conceito de limite; (3) a gestão do tempo disponível; (4) a definição de objetivos e estratégias a adotar, entre outras. Por outro lado, esta tarefa fez-me refletir continuadamente que "planear não é executar" (Abrantes, 1985, p.1).

Não considerei os planos como estáticos e tive em conta as situações inesperadas que ocorreram, adaptando ou modificando aquilo que tinha previsto, conforme sugere Abrantes (1985).

Note-se, por exemplo, o caso da elaboração do Plano "Extra", preparado dois dias antes da aula lecionada a 20 Abril e a alteração do plano inicial da segunda aula, onde estava prevista a resolução da Tarefa "Como varia a temperatura" que foi substituída pela resolução de exercícios do manual, para consolidação prática dos temas lecionados. Esta tarefa foi apropriadamente enquadrada na 5.ª aula tendo sido conjuntamente resolvida com a Tarefa "Gráfico da função derivada".

A projeção dos slides com a alusão à História da Matemática, conforme inicialmente previsto, não fez parte da 2.ª aula, contudo, estes vieram a ser projetados, conforme decisão momentânea, na 5.ª aula lecionada.

Estabeleci alguns elos de ligação entre algumas das dificuldades detetadas em sala de aula, e as relatadas na literatura que fundamenta o trabalho e/ou previstas no plano de aula, com o intuito de as poder fazer emergir, nos momentos de discussão. Deste modo, provoquei intencionalmente momentos de discussão em grande turma, como por exemplo na 5.ª aula quando solicitei a um aluno que através da expressão algébrica do declive de uma reta indicasse o "declive" de uma reta vertical (Figura 8).

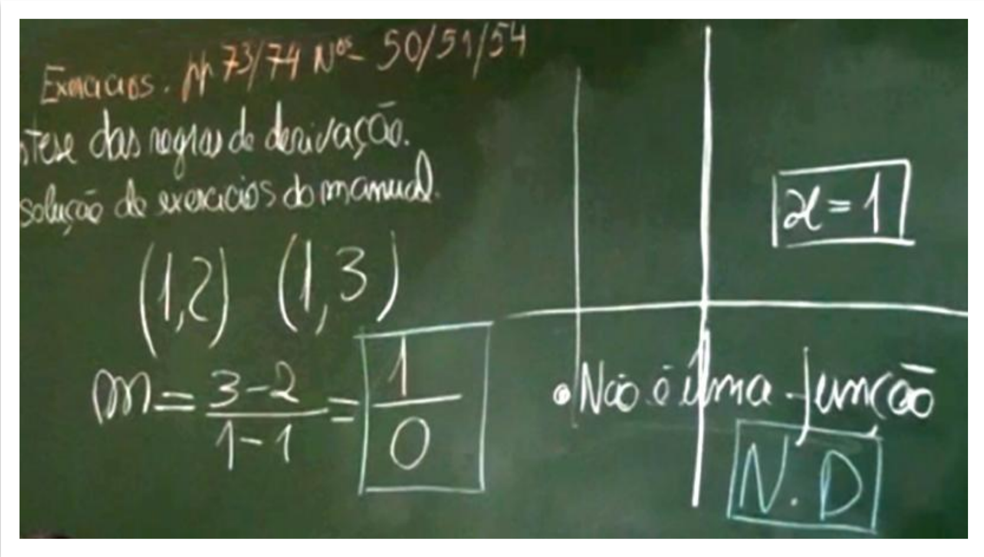


Figura 8 - "Declive" de uma reta vertical

Foi também minha intenção que os futuros planeamentos de aula beneficiassem dos momentos decorridos na intervenção.

Após cada aula lecionada refleti sobre vários aspetos decorrentes da mesma onde estava incluído um processo dinâmico de replanificação, quer para as aulas subsequentes quer para futuras planificações. A planificação previamente elaborada sofreu, por vezes, alguns desvios dado o decorrer da aula.

Surgiram situações inesperadas que me levaram a improvisar ou adaptar momentos de clarificação; alguns bem-sucedidos, outros que, após reflexão, considero poderem ter decorrido melhor.

Os momentos bem-sucedidos alcançaram os objetivos planeados, o que me levou a registá-los no intuito de os poder incluir em futuras planificações (*Caminho (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) e (9))*.

Os momentos menos bem-sucedidos foram sujeitos a uma reflexão mais aprofundada. Procurei, inicialmente, identificar onde se localizava a origem da dificuldade evidenciada pelos alunos. Esta dificuldade poderia ter origem na escolha da estratégia de lecionação, o que me encaminhou à pesquisa e formulação de uma outra estratégia, a ter lugar na aula subsequente. Contudo, fiz o registo da situação decorrida em sala de aula para a considerar em futuras planificações (Caminho *(1), (2), (6), (7), (10), (11), (12) e (15))*. Por outro lado, a dificuldade evidenciada pelos alunos poderia resultar de um "esquecimento" de conteúdos já lecionados, o que remetia para um momento de revisões pontuais ou, caso a dificuldade não fosse claramente identificada, à promoção de uma discussão em grande turma onde os alunos pudessem ser estimulados a comunicar as suas ideias *Caminho (1), (2), (6), (7), (10), (13), (14) e (15).* Registei ambas as situações com o intuito de as considerar em futuras planificações de forma a prevenir uma situação idêntica no futuro.

Para representar esta situação e fundamentada no texto de Abrantes (1985) esquematizo (Figura 9), de modo geral, o processo dinâmico de planificação que está inerente a esta intenção. Todavia, é de maior importância realçar que a efetivação desta intenção em futuros planos terá sempre em conta a turma em que se possa inserir; o nível de conhecimento matemático dos alunos e as suas dificuldades.

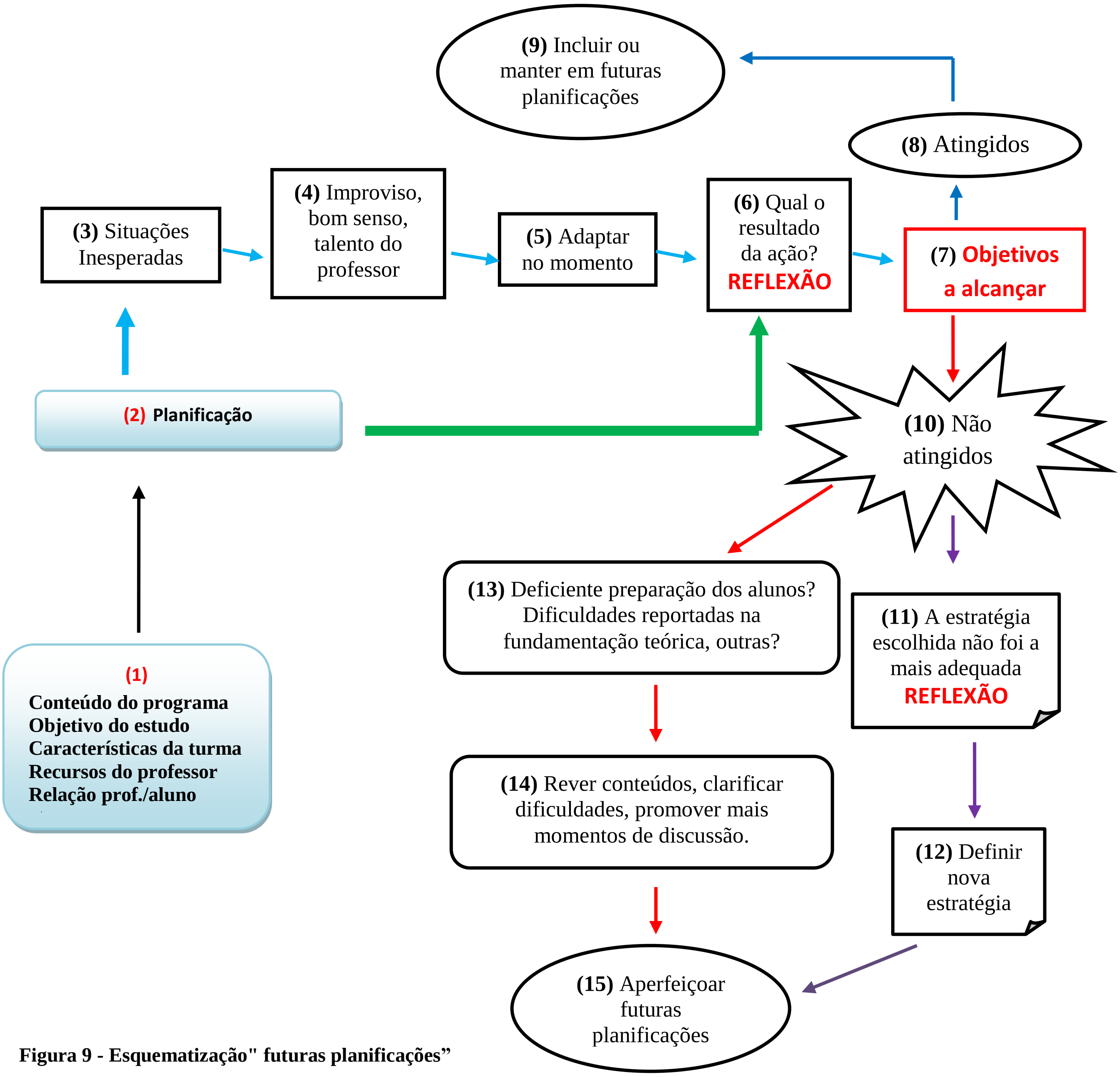


Figura 9 - Esquematização" futuras planificações"

Tentei que a sequência de aulas (Quadro IV) e as respetivas planificações fossem consistentes com a teoria que serviu de fundamentação a este estudo, com as características de aprendizagem da turma, e com o programa em vigor, sofrendo pontuais alterações e ajustes dado que “O ensino eficaz da matemática aproveita os processos de raciocínio do estudante para avaliar e direcionar o seu progresso, em relação à compreensão matemática, e ajustar os métodos de ensino de forma a apoiar e ampliar aprendizagens” (NCTM, 2012, p. 3).

3.5 Estratégias de ensino e recursos utilizados

A construção do “conceito imagem” pode ser consequência do tipo de ensino praticado ou do programa de ensino (Tall & Vinner, 1981) e “dada a natureza das dificuldades dos alunos no que diz respeito ao conceito de limite, os conflitos cognitivos profundos não serão resolvidos sem a ajuda do professor” (Tall, 1993, p. 21).

Conforme sugerido por Tall (1993), a estratégia de ensino para a introdução do conceito de limite deve contemplar uma aprendizagem ativa, onde o professor deve proporcionar atividades reflexivas para a reconstrução deste conceito que, neste estudo, é limitado pelo tempo de lecionação. O mesmo autor também sugere que o professor, para minimizar a construção de fatores de conflito potenciais, deve usar materiais e estratégias de ensino facilitadoras à construção e compreensão das ideias fundamentais, antes de serem introduzidos conceitos formais (Tall & Vinner, 1981).

O programa em vigor (ME, 2001) sugere que a noção de taxa de variação /derivada deve ser introduzida recorrendo a um uso informal da noção de limite, o que vai ao encontro do que Tall (1993) defende. Este autor refere que os alunos que iniciam o estudo do conceito de limite com base na realização de exercícios, forma de trabalho marcante da abordagem formal do ensino expositivo (Ponte, 2005), virão a ter, numa fase posterior da sua aprendizagem, graves limitações na compreensão do conceito. A abordagem formal pode revelar-se muito difícil no seu ponto inicial, pela falta de promoção dos aspetos intuitivos (Tall & Vinner, 1981), pelo que estes devem ser motivados através da resolução de tarefas onde “os alunos têm de mobilizar os seus conhecimentos intuitivos” (Ponte, 2005, p. 18) e não só a destreza na manipulação algébrica; uma das características do ensino exploratório.

As investigações efetuadas evidenciam que os alunos habituados a um ensino exploratório revelam, no manuseamento algébrico do limite, o mesmo grau de destreza que os alunos habituados a um ensino expositivo. Contudo, no que se refere à resolução de tarefas que exigem compreensão conceptual, estes alunos mostram um conhecimento significativamente superior (Tall, 1993). Deste modo, a prática do ensino exploratório mostra-se como uma opção fundamental na aprendizagem do conceito de limite. Todavia, segundo Tall (1993), esta prática pode criar um número significativo de conflitos suscitáveis ao envolvimento de fatores de conflito potencial, que podem entrar em conflito com qualquer teoria formal. Assim, o professor deve estabelecer a ponte entre a compreensão presente do aluno e a intencionada (Férnandez-Plaza, Rico, & Ruiz-Hidalgo, 2011), em momentos de discussão em sala de aula, que são momentos marcantes e significativamente valorizados no ensino exploratório. As discussões em sala de aula "constituem oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (Ponte, 2005, p. 24) o que leva à clarificação dos inúmeros conflitos cognitivos inerentes ao conceito de limite, e retratados nas investigações.

No ensino exploratório, a aprendizagem dos alunos é encarada como um processo de construção que, quando erróneo, deve ser remediado. É nessa remediação, aprendendo com os "erros" cometidos no processo e não só na correção dos resultados, que se compreendem os verdadeiros significados e se vai construindo a literacia Matemática (NCTM, 2007).

É de realçar, por tudo o que foi referido, entre muitos outros aspetos, a importância da comunicação como interação social (Menezes et al., 2014) na prática do ensino exploratório, neste caso da Matemática. A comunicação entre alunos/aluno/professor deve ser "um processo social de construção e partilha do conhecimento matemático" (Menezes et al., 2014, p. 138). É essencial que o professor solicite a participação dos alunos nas discussões, para repensarem as suas afirmações, e explicarem, em turma, diversas formas de pensar, proporcionando informações ao professor, como por exemplo, acerca do "conceito imagem" de limite que o aluno está a construir. Para retratar parte desta situação e com o intuito de apresentar o exemplo de uma autoexplicação (Menezes et al., 2014) menciono o que aconteceu na 4.ª aula lecionada, após ter solicitado a ida ao quadro de um aluno para explicitar a sua dificuldade e repensar na sua afirmação. O aluno apoiado na representação gráfica, previamente registada por mim no quadro, e à medida que ia desenvolvendo o seu raciocínio, auto clarificou-se: “Claro, já percebi, o que estava a dizer não está certo”, o que traduziu uma consistente “procura individual de significado” (Menezes et al., 2014, p. 142). Esta aprendizagem com compreensão fomentou a autonomia do aluno (NCTM, 2007) por ser ele próprio a chegar à resposta certa.

É neste contexto que surge a minha opção pela prática do ensino exploratório, já que uma das suas caraterísticas principais é a de que “o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p.22).

Assim, optei por proporcionar, de modo geral, atividades reflexivas, como por exemplo momentos de discussão e análise crítica após a realização das tarefas, para a construção do “conceito imagem” de limite, embora restringidas pelo tempo de lecionação, já que os alunos aprendem a partir da reflexão do trabalho que realizaram (Ponte, 2005).

O trabalho autónomo foi realizado a pares formados no início do ano pelos próprios alunos e com o consentimento da professora, não havendo necessidade de alteração dado que houve interação entre os elementos do par, o que “possibilitou a partilha de questões, estratégias e intuições que favorecem a compreensão [Matemática] ” (Nunes, 1996, p. 1), tão essencial na compreensão do conceito de limite. A fluidez do trabalho, a comunicação, a ausência de “tensão” comunicativa, entre outros aspetos, estabelecidas entre os elementos do par revelou a habituação dos alunos a esta forma de trabalho. O programa em vigor (ME, 2001) refere que “O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros” (ME, 2001, p. 11), sugerindo deste modo a necessidade de implementação desta forma de trabalho, nas aulas de Matemática.

Em conformidade com o sugerido por Christiansen e Walther (1986) citado em Fonseca et al. (1999) a configuração das aulas onde é praticado o ensino exploratório passa, de um modo geral, pela introdução da tarefa, resolução da mesma, discussão final/reflexão (onde se criaram conexões entre ideias e significados) e subsequente sistematização das aprendizagens. Deste modo, tentei que as aulas lecionadas refletissem a sequência dos momentos atrás sugeridos.

A introdução da tarefa, caso prevista no plano, realizou-se oralmente por um aluno dando espaço para a interpretação dos enunciados, esclarecimento de alguma dúvida colocada pelos alunos, "alerta" de justificações solicitadas, entre outros aspetos. Não foram explicitadas situações que pudessem "esvaziar" a dificuldade da tarefa e/ou colocar em causa a motivação para a sua resolução (Ponte, 2005)

Nos momentos de realização autónoma da tarefa interagi com os pares/elemento do par colocando questões orientadoras, caso verificasse que o(s) aluno(s) estava(m) bloqueado(s) e não prosseguia(m) o seu trabalho. Iniciei momentos de discussão em turma quando o desempenho dos alunos não era o previsto, porém dei indicações aos alunos que não apresentavam dificuldade para prosseguir o trabalho. A resolução de algumas questões foi realizada, de modo geral, pelos alunos no quadro tendo sido estas previamente selecionadas no momento em que circulava pela turma. A seleção das resoluções passou por: (a) poderem trazer extensões à questão; (b) manifestarem uma dúvida generalizada, e (c) proporcionarem o aproveitamento de um "erro" de um aluno, que originasse aprendizagem significativa a toda a turma. Quando existiam distintas resoluções, sequenciei a sua resolução no quadro por nível de acessibilidade, ou seja, da resolução "menos formal" (Ex: representação gráfica de uma reta) até à mais formal (Ex: encontro da derivada por definição).

Após o trabalho autónomo a pares os momentos de discussão, estimulados pelas tarefas realizadas, facultaram a exploração, em grande grupo, de alternativas de resolução, e a descoberta de generalizações de conceitos previamente compreendidos. Na discussão final/reflexão, após desenvolvimento do trabalho e em grande grupo, tentei assumir um papel de orientadora e questionadora colocando perguntas de focalização e inquirição (Menezes et al. 2014). Procurei promover o raciocínio do(s) aluno(s) incentivando o diálogo e sentido crítico. Pretendi estimular a reflexão e completude/melhoria das respostas com discussão em turma aproveitando as intervenções dos alunos, a verbalização do seu raciocínio, e a discussão dos processos, confrontando-os com outros. Tentei orientar os alunos para conjeturar novas hipóteses de resolução, como por exemplo, utilizar outras representações, que lhe são facilitadoras na aprendizagem e que proporcionam aos colegas outras perspetivas de abordagem à questão. Sempre que possível utilizei contra exemplos para a clarificação das dificuldades, porque proporcionam outros processos de raciocínio o que aprofunda a compreensão dos conceitos (NCTM, 2007).

A utilização de tarefas que desafiem os alunos (a abordar na próxima seção deste capítulo) e a utilização de recursos didáticos que "promovem e potenciam o raciocínio [matemático] dos alunos" (Menezes et al., 2014, p. 149) são também dois focos integrantes do ensino exploratório (Ponte, 2005).

A fundamentação teórica do estudo sublinha o quando é importante o uso das várias representações no estudo do conceito de limite, nomeadamente na utilização dos *R3* (representação gráfica, numérica e simbólica). O recurso *software Desmos|Beautiful Free Math* (Desmos) explorado em sala de aula proporcionou aos alunos a exploração de duas dessas representações, a gráfica e a numérica (também explorada através da calculadora gráfica). Estas duas representações foram exploradas não só de forma singular mas também proporcionaram, de forma conjunta, diferentes pontos de vista dos conceitos em estudo, bem como, facilitou "estratégias pedagógicas diferenciadas, conducentes ao sucesso e realização de cada aluno" (DL 240/2001).

Detetar que um aluno "não compreende o conceito de limite mas é capaz de obter o seu valor através de uma rotina de manipulação algébrica" (Juter, 2008, p. 2327) pode dar início a uma discussão, em grande grupo, orientada para a utilização das representações gráfica e numérica (tabela), com a exploração do recurso *Desmos,* permitindo, assim, o estudo de diferentes perspetivas que podem conduzir à superação da dificuldade manifestada. Esta situação enquadra-se no programa em vigor (ME, 2001), porque uma das suas sugestões metodológicas sugere que "os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização" (ME, 2001, p. 10). A utilização do recurso *Desmos* ajuda à construção do "conceito imagem" de limite porque: (1) ao fixar um ponto e arrastar um outro de um intervalo da função em estudo o aluno observa, de forma dinâmica, que o declive da reta secante, em limite, vai ser o declive da reta tangente, e (2) a alteração do valor da amplitude do intervalo ($h \rightarrow 0$) na folha de cálculo, que pode ser projetada paralelamente à representação gráfica, auxilia a descoberta da expressão algébrica que define derivada.

As várias discussões, provenientes da exploração do recurso *Desmos* em sala de aula fomentaram "competências ao nível da capacidade de abstração" (Juter, 2008, p. 2320) necessárias à compreensão do conceito de limite porque, como por exemplo, dificilmente os alunos poderiam recriar mentalmente a noção de movimento atrás referida, que este recurso facilita.

O uso da representação numérica (elaboração de tabelas) proporcionada pelo *Desmos* e pela calculadora gráfica, que executam cálculos rotineiros de forma rápida e exata, despertou o sentido crítico dos alunos e possivelmente clarificou um conflito cognitivo. Quero com isto dizer, como por exemplo; os alunos considerarem o declive (em limite) de uma reta igual a um número real esquecendo a aproximação efetuada (porque o fator de conflito potencial "o limite pode ser aproximado tanto quanto eu queira" pode ser evocado simultaneamente com o fator de conflito potencial do limite ser finito) e provocar que alguns alunos afirmem que o processo prático da tabela (representação numérica) é finito, "logo" a sua precisão também (questão 1.5, Tarefa 2).

O *Desmos* foi essencialmente explorado nos momentos de discussão e, sempre que adequado, estabeleci conexão às questões das tarefas propostas. De modo geral, utilizei a projeção do recurso Microsoft PowerPoint (*PPT*) no momento da síntese da aprendizagem dando oportunidade aos alunos para registarem definições e/ou propriedades dos conteúdos abordados. A projeção da síntese das aprendizagens, em geral decorrida no final das aulas lecionadas, foi dividida em dois grupos; "Já sabemos" e "A saber" facultando aos alunos, respetivamente, uma ponte com as aprendizagens efetuadas e os novos conteúdos estudados.

Para além do recurso *Desmos*, já descrito, outros recursos usados na intervenção foram: (1) a calculadora para facilitar os cálculos na elaboração de tabelas (representação numérica) não tornando moroso e fastidioso um processo repetitivo de manuseamento algébrico; (2) a projeção de *PPT* para síntese/revisão das aprendizagens e alusão à História da Matemática, e (3) tarefas elaboradas e manual adotado pela escola.

Após as aulas lecionadas procurei analisar e refletir sobre o trabalho realizado, para possível alteração/clarificação nos planos e/ou colmatar alguma dificuldade nas aulas subsequentes, colocando as questões: "A tarefa mostrou-se adequada aos objetivos iniciais? Os materiais e recursos utilizados foram uteis? A organização dos alunos foi pertinente? Deve ser alterada? A introdução da tarefa foi suficiente? A gestão do tempo foi boa? Que dificuldades foram sentidas? …" (Fonseca, Brunheira, & Ponte, 1999, p. 11). Quero com isto dizer que a análise/reflexão que realizei após cada aula lecionada revelou parte das dificuldades dos alunos proporcionando também um "meio de desenvolvimento profissional para o Professor" (Fonseca, Brunheira, Ponte, 1999, p. 14), influenciando algumas estratégias de ensino nas aulas subsequentes.

Compreender a natureza de alguns conflitos cognitivos que surgiram passou por ter o conhecimento prévio de algumas dificuldades dos alunos, já evidenciadas na literatura que apoia o estudo. Assim, clarifiquei, em geral, os alunos de forma mais rápida, aproveitando tempo de aula, e detetei mais facilmente as suas dificuldades.

3.6 Tarefas

A literatura em educação matemática e o programa em vigor (ME, 2001) referem a resolução de problemas como um meio eficaz para iniciar o estudo intuitivo de limite, e que a prática de um ensino exploratório viabiliza a resolução de problemas em sala de aula.

O ensino exploratório atribui ênfase à resolução de problemas e às tarefas de investigação, tendo em conta o seu "grau de desafio matemático e o grau de estrutura" (Ponte, 2005, p. 17). Este tipo de ensino enfatiza, igualmente, a "reflexão realizada pelo aluno(s) a propósito da atividade que realizou" (Ponte, 2005, p. 23) pois proporciona momentos de diálogo entre professor/aluno(s)/aluno.

Assim, procurei que as tarefas utilizadas na UE lecionada (Anexo III) fossem ao encontro do atrás referido e que estivessem de acordo com os objetivos específicos de cada aula (Tabela I). Para isso, porque dificilmente encontrei nos manuais escolares tarefas que satisfizessem os objetivos específicos delineados, criei ou adaptei algumas tarefas de outras fontes.

As tarefas propostas promoveram diálogos entre professor/aluno/alunos e o sentido crítico/criativo destes últimos que, em sala de aula, são alguns dos fatores caraterizantes da resolução de um "bom" problema (Abrantes, 1985). Tall (1993) refere que os alunos com fraco desempenho no cálculo dos limites tendem a procurar a utilização de procedimentos (regras operatórias), que é um requisito típico de um exercício e não de um "bom" problema, desafiador das "capacidades matemáticas [dos alunos] e assim experimentar o gosto pela descoberta" (Ponte, 2005, p. 13).

Procurei que os problemas apresentassem uma formulação implícita, proporcionando vários caminhos de solução onde os alunos puderam explorar o contexto de formas diversas (Abrantes, 1985) e permitissem "construir novos conhecimentos matemáticos" (NCTM, 2007, p. 394) que, neste caso, se podem converter na construção do "conceito imagem" de limite.

De uma maneira geral desejei que as tarefas permitissem confronto entre as várias respostas dos alunos que, mesmo sendo menos corretas ou incompletas, encaminhassem à compreensão das ideias, raciocínios e dificuldades. Pretendi que algumas das tarefas propostas, de natureza exploratória (Ponte, 2005) e contextualizadas na vida real, orientassem os alunos a desenvolver intuições matemáticas e a chegarem à generalização dos conceitos em estudo, como por exemplo, taxa média de variação e derivada. Procurei que estas tarefas construíssem adequadas intuições, com o objetivo de alcançar as definições formais, no tema da diferenciabilidade, bem como, iniciar a construção do "conceito imagem" de limite, através de mecanismos de apoio, como por exemplo o recurso *Desmos,* que "devem ser organizados de forma diversificada, não se limitando a meras aulas de repetição" (ME, 2001, p. 3).

As tarefas possuem uma identidade própria, ocasionada pela escolha de um título apelativo e enquadrado nos conteúdos do tema em estudo, que auxilia o aluno a identificar mais facilmente a ordem sequencial dos mesmos. A sequência das tarefas propostas (Quadro IV) foi delineada aproveitando os conceitos previamente compreendidos nas tarefas antecedentes, o que resultou num trabalho gradual e numa aprendizagem progressiva, ao longo das aulas lecionadas. Desta forma, os alunos tiveram possibilidade de desenvolver processos de raciocínio, inicialmente apoiados em aspetos informais, como por exemplo, a observação gráfica da tangente a um ponto da função, para alcançarem a definição formal da derivada num ponto da função.

Procurei, ainda, combinar diferentes tipos de tarefas (os alunos têm formas distintas de aprender) ou seja: (1) tarefas de natureza exploratória que são relativamente abertas e fáceis onde "os alunos mobilizam conhecimentos intuitivos" (Ponte, 2005, p. 18). Estas tarefas foram concebidas para introduzir novos conceitos como por exemplo o de derivada e de limite. Conforme refere Biza (2007), as tarefas propostas devem proporcionar a exploração de situações previamente estudadas e encaminhar o aluno à descoberta da generalização; (2) problemas com maior ou menor grau de desafio matemático já que a sua estrutura é mais fechada (Ponte, 2005), e (3) exercícios do manual que promovem a manipulação algébrica para destreza no cálculo dos limites e derivada, entre outros, porque no ensino exploratório há momentos que contemplam esta atividade (Ponte, 2005). Em algumas das tarefas, nos casos (1) e (2), propus extensões alterando o contexto das mesmas, o que proporcionou discussões em grande turma que evidenciaram algumas dificuldades.

As tarefas foram escolhidas de acordo com o contexto de sala de aula e "feedback" do grau de conhecimento dos alunos. Após compreensão dos conceitos e para consolidação de conhecimentos adquiridos foram também realizados, em sala de aula e propostos como trabalho de casa, exercícios de aplicação, ou seja, tarefas fechadas e de desafio reduzido (Ponte, 2005), e alguns problemas do manual adotado pela escola.

Todas as tarefas (Anexo III), com incidência na resolução de problemas, consideraram as dificuldades manifestadas pelos alunos e refletiram a estratégia delineada (planeamento a médio e curto prazo) para alcançar os objetivos de aprendizagem dos mesmos. Conforme indicação na fundamentação teórica, uma consistente construção do "conceito imagem" de limite fez parte integrante das tarefas elaboradas perspetivando a aprendizagem futura da sua definição formal. Desta forma, penso ter adotado estratégias em que "os estudantes fossem colocados perante a resolução de problemas escolhidos que permitiram despistar dificuldades e deficiências na formação básica e acertar estratégias de remediação" (ME, 2001, p. 2) tornando a aprendizagem dos alunos mais significativa, na compreensão do conceito de limite e derivada.

Tarefa 1 – Variação e taxa média de variação num intervalo [a, b]

A Tarefa 1, adaptada de Costa e Rodrigues (2013), tem como objetivo a introdução da expressão algébrica da taxa média de variação (t.m.v.) num intervalo [a, b]. A tarefa foi adaptada de forma a articular quatro representações de uma função, a gráfica, numérica, simbólica *(R3)* e a linguagem natural. Todas as questões, exceto a última que tem um contexto puramente matemático, estão contextualizadas em problemas da vida real. Na questão 1 escolhi intervalos do domínio da função que, após os alunos explorarem significados e chegarem por eles à generalização da expressão algébrica da t.m.v. [a, b], permitiram a compreensão, apresentando contra exemplos, da relação entre a t.m.v. [a, b] com a monotonia da função. Esta questão proporciona, para além de várias estratégias de resolução, uma extensão para revisão das definições formais de função crescente, decrescente e constante, bem como, intervalos fechados/abertos e continuidade, que devem estar presentes no "conceito imagem" de limite que os alunos vão construindo.

A função f da questão 2 foi escolhida para alertar os alunos que nem sempre $f(0) = 0$ (por vezes os alunos mais distraídos confundem objeto com imagem da função); contextualizando o "alerta": a altura da árvore, quando plantada, pode não ser nula.

A questão 3 promove a autonomia do aluno, por ser de idêntica resolução à questão 2 porém, possui um grau de complexidade mais elevado, ou seja, para atribuir significado, o aluno tem de escolher os limites do intervalo solicitado. A última alínea desta questão, ao solicitar uma conjetura do ocorrido, submete o aluno a uma análise da monotonia da função, apelo ao sentido crítico e alguma imaginação.

A questão 4, de contexto puramente matemático e retirada do manual, proporciona várias estratégias de resolução onde pode ser trabalhada a equação geral da reta que passa por dois pontos, vetor diretor e declive de uma reta, para além de envolver a expressão algébrica da t.m.v. [a, b]. Pretendi com esta questão que os alunos articulassem a representação simbólica e gráfica bem como motivar o estudo do ponto de tangência (a abordar na próxima tarefa com a introdução do conceito de derivada num ponto).

Tarefa 2 – A bola no plano inclinado

A Tarefa 2, teve por base tarefas dos manuais Costa e Rodrigues (2013) e Teixeira et al. (1998) que foram adaptadas com os objetivos de: (1) explorar o conceito físico de derivada como sendo a taxa de variação instantânea; (2) a interpretação geométrica da derivada de uma função, e (3) a introdução da sua expressão algébrica.

As primeiras questões da tarefa, onde o aluno articula a representação gráfica e numérica, por ele construídas com o auxílio da calculadora, e a representação algébrica de uma função quadrática, dada no enunciado, orientam o aluno à descoberta do valor da derivada num ponto da função. A estratégia de resolução inicia-se no conceito da t.m.v. [a, b], abordado na Tarefa 1, passa pela associação da velocidade à rapidez instantânea (velocidade instantânea) para encontrar um valor estimado (aproximação numérica) que, em limite, é um valor exato. O uso da calculadora conduziu à elaboração e análise da conjetura da equação reduzida da reta que representava a tangente ao ponto em estudo. A palavra conjetura foi propositadamente referida na tarefa para promover uma discussão em turma em torno do conceito de limite pois só, em limite, os alunos poderiam considerar um valor exato que era o do declive da tangente. Deste modo, foi realçado que o processo prático envolvido na elaboração da tabela (valores finitos) não implicava a sua precisão finita; só em limite. A tarefa foi concebida para explorar uma aplicação do recurso *Desmos* e provocar a discussão em grande turma em torno da expressão algébrica da taxa de variação (derivada) de uma função num ponto do seu domínio onde, por inerência ao conceito de derivada, se aborda de forma intuitiva o processo dinâmico de limite. A tarefa, para além de proporcionar uma discussão, em grande turma, onde se confrontam os vários significados que os alunos possam atribuir ao limite e derivada de uma função, também faculta o cálculo algébrico da derivada num ponto x do seu domínio, após os alunos terem descoberto a expressão algébrica da mesma.

Ao adaptar esta tarefa, perspetivei a introdução intuitiva de limite a uma futura (12.º ano) introdução da definição formal ("ε-δ") do mesmo. Quero com isto dizer que a conexão que o aluno estabelece entre a representação gráfica e numérica da função e o processo dinâmico solicitado (traçado das várias secantes com diferentes declives, até ao traço da tangente onde o seu declive é a derivada no ponto; com a atribuição de valores de h sucessivamente mais pequenos; $h \to 0$) pode clarificar o conceito de limite de uma função, conforme refere Biza (2007). Por outro lado, o facto do cálculo do limite ser um número real (o declive da reta é oito) vai ao encontro de explicitar uma dificuldade, prevista em toda a fundamentação teórica do estudo, que é a de grande parte dos alunos percecionarem o limite como um valor inatingível. Acautelar a formação de possíveis inconsistências entre a futura definição formal e o conceito intuitivo e formal de limite pode, segundo Biza (2007), esvaziar um possível "conflito potencial". Como extensão à abordagem do processo dinâmico de limite, a tarefa também adequava uma revisão aos limites laterais da função num ponto, introduzida aquando o estudo das assintotas, através do estudo do intervalo $[2,\ 2+h]$ ou $[2-h,\ 2]$.

Tarefa 3 - A subida da caixa

A Tarefa 3 está estruturada em duas partes, a primeira foi elaborada por mim atendendo aos objetivos propostos e a segunda foi adaptada de Teixeira et al. (1998). Tem como objetivos: (1) descobrir algumas regras de derivação; (2) compreender a relação entre a derivada de uma função afim e a sua monotonia, e (3) explorar a relação entre as representações gráficas da função e sua função derivada.

A tarefa apelava essencialmente ao sentido crítico do aluno e a uma análise cuidada dos resultados obtidos. A compreensão do 'porquê' da sobreposição das três retas (gráfico da função, tangente a um ponto do seu domínio, e secante) que o aluno é orientado a efetuar, dirige o aluno a obter a expressão algébrica da função derivada de uma função afim, desenhar o seu gráfico e concluir acerca da sua monotonia. Esta questão, caso o aluno tivesse dificuldade em resolver algebricamente o limite, contemplava a possível estratégia do mesmo concluir a monotonia (função constante) da função derivada através do estudo da razão incremental. Neste caso, segundo Tall e Vinner (1981), a construção do "conceito imagem" do mesmo é um processo "bem-sucedido".

Na questão seguinte, após apreensão dos significados e compreensão dos conceitos envolvidos, porque me pareceu oportuno apesar de não estar contemplado no programa em vigor, o aluno alcança o raciocínio essencial ao processo de primitivação concluindo que se $f'(x) = 0.7 \; então \; f(x) = 0.7x + b, com \; b \epsilon R$.

A parte II da tarefa permite aos alunos diferentes estratégias de resolução e, tendo presente a exploração de várias representações (gráfica, numérica, e algébrica), possibilita a exploração gráfica da função derivada com a própria função, descobrir a generalização da derivada das funções polinomiais de 2º grau e racionais do tipo $y = \frac{a}{x}, a, x \neq 0$ bem como aplicar o conceito de limite com compreensão relacional.

Tarefa 4 - Como varia a temperatura

A Tarefa 4, adaptada de Costa e Rodrigues (2013), tem como objetivos: (1) a compreensão da relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função num intervalo [a, b], e (2) descobrir que o estudo do sinal da derivada de uma função permite identificar os mínimos/máximos relativos, num determinado intervalo da mesma.

A tarefa foi adaptada para que o aluno reconheça a função como um processo (presença da representação gráfica da função e ausência da sua expressão algébrica) e não como um objeto que pode induzir a determinados procedimentos algébricos sem atribuição de significado (Juter, 2008). As várias questões da tarefa conduzem o aluno a descobrir que o sinal da função derivada indica a variação da função num determinado intervalo. Esta conclusão é o culminar de um processo que passa por promover a fluência na utilização articulada das representações gráfica e algébrica, relacionar o significado físico da derivada com a taxa de variação instantânea, (consolidação de conteúdos abordados nas tarefas anteriores) e aplicação da tabela de variação, já estudada nos anos precedentes, mas agora inscrita no contexto da diferenciabilidade.

Tarefa 5 - Gráfico da função derivada

Esta tarefa, adaptada de Teixeira et al. (1998), tem como objetivos: (1) consolidar os conhecimentos adquiridos mas explorando o processo inverso ao habitual; (2) compreender, explorando, porque é que não existe derivada num ponto anguloso da função; (3) descobrir que a função pode ter máximo/mínimo relativo sem que a derivada se anule, uma vez que não existe, e (4) explorar o conceito de limite na relação entre o gráfico da função e o gráfico da função derivada.

A questão 1 procura que o aluno consolide os conhecimentos adquiridos ao longo da unidade lecionada mas explorando o processo inverso ao aplicado na tarefa anterior. Quero com isto dizer que nesta tarefa é solicitado ao aluno a construção da tabela de variação partindo da monotonia da função e não do sinal da sua derivada. A tarefa procura que os alunos justifiquem as suas escolhas pela negação ("O gráfico **não** representa a tua escolha porque…") permitindo que o aluno diligencie diferentes ângulos de análise.

A questão 2 proporciona, pelo menos, cinco distintas estratégias de resolução, ou seja: (1) por observação do gráfico da função ir excluindo hipóteses; (2) elaborar a representação numa tabela das propriedades da função e proceder à respetiva análise; (3) partir do gráfico da derivada e analisar, comparando, o gráfico da função; (4) sobrepor o gráfico da função com os diferentes gráficos dados da função derivada e, através de análise, relacionar a monotonia com o sinal da derivada, e (5) construir um quadro de variação a partir da informação de 'cada' função derivada dada e comparar com o quadro de variação previamente preenchido. Estas diferentes estratégias de resolução facultam diferentes justificações corretas o que propicia uma discussão, em grande turma, intensa de significados, elevado sentido crítico na argumentação e eminente raciocínio matemático. Ainda nesta questão, os alunos são direcionados a aplicarem conhecimentos essenciais de resultados apreendidos, como por exemplo, que a derivada de uma função quadrática é uma função afim.

As últimas questões induzem o aluno a atribuir um significado ao limite que, por meio de observação gráfica o pode conduzir a um processo "bem-sucedido" construindo desta forma um "conceito imagem" consistente bem como no momento de discussão e tendo em vista uma extensão, a abordagem à igualdade, ou não, dos limites laterais de um ponto da função pode ser considerada.

Tarefa 6 - Piscina no relvado

A tarefa tem como objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos no manuseamento algébrico do limite, regras de derivação, sinal da derivada e monotonia da função (tabela de variação). A tarefa proporciona, no momento da discussão, a interpretação do problema explorando várias representações e a primeira parte faculta, no mínimo, duas estratégias de resolução.

Selecionei a tarefa do manual escolar adotado pela escola (Costa & Rodrigues, 2013) com o objetivo dos alunos explorarem um problema de máximos/mínimos que envolve áreas, diversificando desta forma o contexto da aplicação dos conhecimentos adquiridos, ou seja, estabelecer a conexão dos mesmos num outro âmbito da vida real. Esta tarefa é fechada e com desafio matemático elevado que, segundo Ponte (2005), se pode caraterizar como um problema de duração média, atendendo ao nível de conhecimento da turma, aquando aplicação.

Esta tarefa não foi resolvida em sala de aula, por motivos de alteração ao planeamento escolar, apesar de terem sido elaboradas as várias estratégias de resolução e previsão das dificuldades dos alunos. Deste modo foi proposta para trabalho de casa.

Exercícios do manual

Os exercícios do manual, apesar de serem tarefas fechadas e de desafio matemático reduzido, conforme refere Ponte (2005), foram escolhidos de modo a poderem criar, por meio de questões de verificação ou inquirição (Menezes, 2014) previstas pelo professor no plano de aula, algumas oportunidades de discussão coletiva. O exercícios escolhidos perspetivam estabelecer a ponte com as tarefas realizadas, aumentando a oportunidade do professor encaminhar a discussão para a exploração de significados com/entre os alunos. Por outro lado, os exercícios preveem o aperfeiçoar das técnicas de derivação, destreza no cálculo algébrico da derivada, entre outras.

3.7 Avaliação das aprendizagens

A avaliação é um dos aspetos que me causa mais inquietação na prática profissional do professor. Nos tempos atuais, onde a comparação de classificações sumativas é foco central na seleção dos alunos ao ensino universitário, deparo-me com a necessidade de analisar/refletir acerca do que entendo ser a prática avaliativa e encontrar um caminho, para a apropriar de significado, isento de juízos de valor intuitivos ou baseados no "certo" ou "errado".

A Matemática é uma ciência em construção e a sua aprendizagem também o é, portanto, faz-me todo o sentido que a avaliação seja incluída no processo de aprendizagem do aluno como um dado utilizado para "apoiar a aprendizagem de uma matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos" (NCTM, 2007). Para avaliar o desempenho dos alunos, compete ao professor "procurar convergência de evidências em diversas fontes" (NCTM, 2007, p. 25) que podem espelhar uma imagem mais abrangente dos conhecimentos adquiridos pelos alunos, orientando o mesmo para uma análise mais aprofundada ao valor didático da avaliação. Desta forma sou induzida a conceber a avaliação como facilitadora à construção da aprendizagem do aluno, ou seja, nomeá-la como um "instrumento de regulação pedagógica" (Pinto & Santos, 2006, p. 41), bem como um meio de auxílio ao professor na tomada de "decisões acerca do conteúdo e forma de ensino (frequentemente designada por avaliação formativa) " (NCTM, 2007, p. 25) que “sustenta a regulação do ensino e aprendizagem durante o período em que [a avaliação] decorre” (Pinto & Santos, 2006, p. 46).

A minha opção recai na caracterização da avaliação como sendo “um processo de produção de informação para ser utilizada na melhoria do processo de ensino e aprendizagem” (Pinto & Santos, 2006, p. 98) onde a atividade do professor “tem uma forte componente comunicativa dada a centralidade da comunicação no processo de ensino e aprendizagem” conforme refere Menezes et al. (2014) citando Krummheuer (2009) e Stubbs (1987). Não menos importante, é a consideração do “erro” do aluno como “um ato na construção do conhecimento, que tem uma lógica e que traduz uma representação que o aluno faz de um dado saber” (Pinto & Santos, 2006, p. 35).

A abordagem à apropriação e utilização do conceito de limite, bem como, a compreensão do conceito de derivada que os alunos desta turma de 11.º ano construíram, está articulada com a literatura de referência e programa em vigor que são fonte para as opções metodológicas visionando uma futura avaliação formativa. Conforme referem Santos e Semana (2014), a perspetiva de um processo de avaliação formativa, requer uma integração eficaz entre a mesma, as opções metodológicas, estratégias de ensino e aprendizagem a aplicar. Assim, considerei como instrumentos principais de avaliação ao trabalho e aprendizagem dos alunos: (1) questionamento oral; (2) recolha e análise das resoluções das tarefas apresentadas e teste escrito de avaliação, e (3) observação direta realizada durante as aulas (com especial incidência no momento de discussão/reflexão e resolução de problemas) e no trabalho autónomo dos alunos que me permitiu avaliar a participação e envolvimento nas atividades propostas.

O questionamento oral, aplicado de forma regular, levou os alunos a estabelecerem conexões entre os vários conceitos (“Podes aplicar este processo noutras situações?”) e encaminhou-os para o “desenvolvimento de procedimentos de autoavaliação regulada desenvolvendo assim uma capacidade auto-reflexiva” (Santos, 2008). Procurei incluir, para ajuda à compreensão da natureza dos “erros” dos alunos, a utilização de perguntas de inquirição (Menezes et al., 2014) (“Porque é que afirmas que a t.m.v.[a, b] é a taxa de variação?”) para seguidamente direcionar o aluno a alguns caminhos orientadores de auto clarificação (“Recorre aos valores que encontraste e compara os resultados, quais são os seus significados? / Podes vir ao quadro e explicar o teu raciocínio aos colegas?”).

Na análise das resoluções dos alunos às tarefas propostas e teste de avaliação pretendi compreender as estratégias de resolução dos alunos através de anotações rasuradas, dos procedimentos na construção da resposta e abordei o "erro", inicialmente, como "um ato de pensamento divergente…ao que é esperado em termos normativos" (Pinto & Santos, 2006, p. 82).

O teste de avaliação realizado no dia 30 de abril, uma aula após a minha intervenção, foi utilizado como instrumento de avaliação sumativa pois foi-lhe atribuída uma classificação final (numa escala de zero a vinte valores) com um peso de 40% na média final dos alunos, no 3º período escolar. As questões propostas insidiam sobre os tópicos "funções racionais" e "diferenciabilidade".

Na análise individual às questões do teste de avaliação, nos casos adequados, pude constatar o grau da autonomia de cada aluno, pois de forma geral uma "ajuda" pode ser detetada (como por exemplo comparando as resoluções do mesmo aluno entre distintas questões), o rigor da sua escrita matemática, a seleção e organização dos dados ou seja, "bem escolher" e agrupar/ordenar de modo a construir combinações úteis que possam conduzir à descoberta da generalização de determinada regra matemática, entre outras. O trabalho escrito também demonstrou a ausência (ou não) do sentido crítico do aluno ao resultado apurado, como por exemplo o encontro de uma distância negativa e, proporcionou a autoavaliação; o aluno, defrontado com um problema, poderá mais facilmente ter a consciência do que sabe e do que não sabe resolver. Detetei algumas dificuldades generalizadas que me ajudaram a selecionar o que deveria "revisitar" na aula subsequente. As questões do teste enquadraram-se eficazmente no conteúdo lecionado o que legitima, em grande parte, a classificação atribuída.

As aprendizagens efetuadas e as dificuldades dos alunos são, de modo geral, reveladas nas resoluções escritas o que me proporcionou, após avaliação da pertinência dos seus conteúdos e de estabelecer prioridade na seleção, alguns dos dados para a análise e reflexão do estudo.

Considerando as atitudes e valores como instrumentos de avaliação realço a apreciação que os alunos demonstraram, de modo geral, pela projeção realizada, em sala de aula, da alusão à História da Matemática, à apresentação das tarefas de uma forma cuidada, à vontade de aprender, ao interesse pela pesquisa na resolução de problemas e o no seu envolvimento nas discussões. O sentido de responsabilidade demonstrado através da pontualidade (todas as aulas se iniciaram às 8.15h e a maior parte dos alunos estavam presentes) e perseverança na procura de soluções.

Ao observar como o aluno reage/interage no momento da discussão de um problema posso presenciar a comunicação não-verbal e/ou verbal designados como "canais multi-sensoriais" (Cohen at al., 2007, p. 349). Na não-verbal pude observar as expressões faciais ("A tua expressão indica que ainda não estás convencido…Porquê?") e postura física ("Já te conheço um pouco, quando te inclinas para trás é porque ainda restam dúvidas, será?"); na verbal analisei a fundamentação teórica a que o aluno recorreu para argumentar e justificar os resultados obtidos, a sua argumentação na prova de conjeturas, explicitação de procedimentos e raciocínios, bem como, averiguei o seu grau na compreensão dos conceitos e sua articulação, apreensão de significados, principais dificuldades, conexões entre as várias representações (*R3*), entre outras.

Na observação direta procurei ainda ouvir os alunos como ato comunicativo de natureza interpretativa, ou seja, ouvir para avaliar o conhecimento dos alunos mas também para compreender as suas ideias e o seu raciocínio, conforme refere Menezes et al. (2014). Ouvir adequadamente os alunos na sala de aula, segundo o autor, proporciona contextos favoráveis a uma avaliação das aprendizagens de natureza reguladora, bem como fornece ao professor ferramentas essenciais para tomar decisões que promovam a aprendizagem dos alunos (NCTM, 2007) o que justifica a abordagem que se segue à avaliação da prática de ensino.

Como instrumento principal de avaliação da prática de ensino, conforme sugere Fonseca et al. (1999), recorri à reflecção crítica: (a) sobre a forma como decorreram as aulas lecionadas, que me conduziu à avaliação da pertinência da organização das mesmas, à adequação dos objetivos iniciais, à utilidade dos recursos escolhidos, entre outras, e (b) sobre o trabalho e a aprendizagem dos alunos que envolveu uma análise sobre a forma de reação dos alunos às tarefas, "em que tipo de processos (questionar, conjeturar, testar, provar…) os alunos demonstram maior facilidade ou dificuldade" (Fonseca et al., 1999, p. 11).

3.8 Síntese das aulas lecionadas

Esta secção consiste numa síntese das aulas lecionadas onde a atividade desenvolvida pelos alunos assume o papel principal e assiste às explicitações e justificações apresentadas relacionadas com as estratégias selecionadas, os recursos usados, as tarefas propostas e a sequência adotada, salientando os principais aspetos que se afastaram das planificações. É identicamente explorado em que medida os objetivos específicos, de cada aula, foram visados, e fundamentados os ajustamentos sucedidos, nalgumas aulas, causados pelos desvios da planificação inicial.

O planeamento da UE (Tabela I) contemplava, inicialmente, o período de 9 a 17 de abril para as cinco aulas de lecionação. Seguiam-se duas aulas de resolução de exercícios do manual, para consolidação de conhecimentos e preparação do teste a realizar dia 30 de abril. Uma série de atividades escolares (incluindo uma visita de estudo) obrigaram a algumas alterações cronológicas ao planeamento inicial tendo sido cumprido a sequência de aulas e tarefas que se apresenta no Quadro IV.

Alguns aspetos foram comuns a todas as aulas lecionadas, como sejam a escrita antecipada do sumário, no quadro, bem como a data e a indicação das tarefas a serem realizadas em sala de aula e para trabalho de casa. Outro aspeto comum foi a utilização de recursos tecnológicos, tais como a projeção de *PPT* e a utilização do *Desmos*. Este último visava o apoio aos cálculos dos alunos, a exploração da representação gráfica e numérica, que interage favoravelmente com a estrutura cognitiva dos mesmos bem como me proporcionou outra forma de ensinar. A preparação destes recursos foi feita, sempre que possível, antes das aulas de modo a minimizar as perdas temporais.

De um modo geral, a estrutura das aulas passou pela introdução da tarefa e procedimentos a ter, trabalho autónomo a pares, ida de alunos ao quadro para resolver as questões selecionadas aquando monitorização do trabalho, subsequente discussão/reflexão seguida de sintetização das aprendizagens. A introdução das tarefas envolveu a distribuição do enunciado escrito acompanhada por uma leitura em grande grupo, quando adequada, e de algumas clarificações, quando pertinentes. Nos momentos de trabalho autónomo a pares procurei: (1) ter um papel de orientadora da atividade com uma atitude questionadora perante as inquirições do(s) aluno(s); (2) somente intervir quando verificava que o(s) aluno(s) estava bloqueado não prosseguindo o seu trabalho, e (3) promover a autonomia do(s) aluno(s) e a discussão entre par de alunos, o sentido crítico e o raciocínio matemático dos mesmos. Nos momentos de discussão/reflexão procurei: (1) ter um papel de moderadora e orientadora estimulando a comunicação aluno/alunos/professora com questões de focalização e inquirição; (2) incentivar a discussão dos processos confrontando-os com outros; (3) utilizar as várias representações indicadas na fundamentação teórica do estudo, e (4) valorizar os processos de resolução em relação a procedimentos mecanizados. Nos momentos de síntese utilizei o *PPT* para relembrar os principais aspetos abordados na aula anterior e os compreendidos da presente.

Dois dos desafios que me causaram inquietação foram o de (re)construir o equilíbrio, no sentido de moderação em sala de aula, entre a planificação elaborada, o imprevisto e a realidade bem como proporcionar ao aluno as "ferramentas concetuais" para compreender o conceito de limite, num curto espaço de tempo.

Os alunos mostraram-se interessados e ativos em participar e manifestaram um desejo crescente de intervir nas discussões, demonstrando sentido crítico apurado e revelando conhecimentos apropriados ao seu nível de conhecimento. Nos momentos de trabalho autónomo estiveram concentrados, porém, a frágil autonomia da turma, observada ao longo do ano letivo, implicou um maior apoio da minha parte junto dos pares. O persistente desafio para os alunos foi o de se confrontarem com o conceito de limite, no contexto da diferenciabilidade. Algumas dificuldades foram sendo ultrapassadas pelas ativas discussões em turma, apoiadas em diferentes representações, onde houve troca de ideias, exploração e apreensão de significados, de forma a explorar os vários conceitos envolvidos.

Primeira aula -13 de Abril

A primeira aula da intervenção letiva tinha como objetivos: (1) compreender a diferença entre a variação e a taxa média de variação de uma função num intervalo [a, b]; (2) explorar a representação gráfica, numérica (tabela) e algébrica de funções; (3) calcular e interpretar geometricamente a taxa média de variação, e (4) mobilizar o conhecimento adquirido da variação e t.m.v. de uma função num intervalo [a, b] na resolução de problemas contextualizados na vida real. A resolução da Tarefa 1 – "Variação e taxa média de variação [a, b]" visava o alcance destes objetivos. Assim, a aula iniciou-se com a resolução desta tarefa.

Apesar do grande envolvimento dos alunos na tarefa, ao monitorizar o trabalho autónomo dos alunos verifiquei que, tal como previsto, a principal dificuldade dos alunos se prendia com a atribuição de significados e não com a resolução algébrica. Decidi apresentar no quadro os resultados das duas primeiras questões promovendo a discussão em turma, acerca do significado de cada um dos resultados obtidos. A especial atenção às unidades envolvidas (metros ou metros/hora) contribuiu para mais facilmente contextualizar o problema em linguagem natural e apreender os significados. A discussão promovida em aula clarificou as dificuldades identificadas entre o sinal da t.m.v. e o seu significado no contexto do problema.

No final da discussão anterior, utilizando o exemplo prático envolvido na mesma, abordei a extensão ao problema que estava prevista para levar os alunos à generalização. A resolução da questão seguinte evidenciou a dificuldade já prevista relativa à equivalência das expressões $m = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{-[f(a)-f(b)]}{-[a-b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Aproveitei o raciocínio que o aluno tinha apresentado anteriormente no quadro para clarificação da mesma, acrescentando que bastava multiplicar o numerador e o denominador por um sinal negativo. Os alunos não colocaram mais nenhuma questão tendo evidenciado, pela simplicidade do manuseamento algébrico envolvido, a superação da dificuldade.

A segunda fase da discussão incidiu numa questão com duas estratégias de resolução; uma apoiada na representação gráfica e a outra na representação algébrica de função crescente/decrescente num intervalo. Com a participação dos alunos e a partir das duas representações foi possível generalizar a expressão da t.m.v. [a, b] e explorar o seu significado geométrico.

Aproveitei este momento para motivar os alunos a relacionar a representação geométrica da t.m.v [a, b] com a monotonia da função, tendo os mesmos chegado à conclusão de que o sinal da secante não declarava a monotonia da função. A última alínea da 1.ª questão foi resolvida por um aluno, no quadro, que ao utilizar alguns contra exemplos (estimulados pelo cariz exploratório da tarefa) na explicitação do seu raciocínio, ocasionou troca de ideias e respostas válidas da turma.

Pela atitude dos alunos no decorrer da discussão em turma e apreensão dos significados propostos nas questões da tarefa, os alunos comprovaram compreender a relação entre a t.m.v. [a, b] e a monotonia da função num intervalo pelo que não houve a necessidade de abordar outras possíveis estratégias de resolução, indicadas no plano.

Uma aplicação do recurso *Desmos* foi projetada proporcionando a exploração em grande turma de um caso geral (função seno) entre a t.m.v [a, b] e a variação de uma função. Os alunos foram muito participativos sugerindo a exploração, no *Desmos*, de diferentes intervalos da função em estudo.

O trabalho, autónomo a pares, prosseguiu com a resolução das restantes questões da tarefa, subsequente resolução no quadro, por distintos alunos, acompanhadas de explicação de raciocínios, o que proporcionou momentos de discussão e reflexão entre aluno/alunos/professora.

Terminei a aula com uma breve síntese da diferença entre os conceitos da variação e da t.m.v. [a, b], interpretando a passagem da representação algébrica para a linguagem natural que era um dos objetivos específicos da aula.

O tempo de aula terminou com os objetivos atingidos e o plano cumprido.

Segunda aula -16 de Abril

A segunda aula da intervenção letiva tinha como objetivos: (1) compreender a diferença entre a taxa média de variação de uma função num intervalo [a, b] e a sua derivada num ponto do seu domínio; (2) explorar a representação gráfica, numérica (tabela) e algébrica de funções; (3) calcular e interpretar geometricamente a derivada de uma função (declive da reta tangente à função que passa nos pontos (a, f(a)); (3) explorar o conceito físico de derivada como sendo a taxa de variação instantânea; (4) descobrir a relação entre os conceitos estudados, e (5) Mobilizar os conceitos compreendidos na resolução de problemas contextualizados na vida real. A resolução da Tarefa 2 – "A bola no plano inclinado" visava o alcance destes objetivos.

A aula iniciou-se com a projeção do *PPT* com a síntese da aula anterior, dando tempo aos alunos para registarem no seu caderno as definições dos principais conceitos já estudados. Os alunos envolveram-se na resolução autónoma da tarefa que seguidamente foi discutida em grande turma. As primeiras questões foram resolvidas por mim, no quadro, solicitando a intervenção dos alunos, uma vez que na monitorização do trabalho dos mesmos não identifiquei dúvidas ou dificuldades. O atraso registado até ao momento, apesar de ainda não ser muito significativo, fez-me prever que o tempo necessário para a introdução do conceito de derivada, de limite (que conforme previsto se poderia tornar moroso) e resolução de exercícios do manual, podia ser curto. Assim, decidi promover a discussão em turma das restantes questões da tarefa, sem a presença de nenhum aluno no quadro para a sua resolução. Porém, fui desafiando os alunos a reestruturarem as suas afirmações, quando menos corretas, e enquadrei, na exploração da passagem ao limite da razão incremental da t.m.v. [a, b], as suas contribuições válidas.

A questão que se prendia com a descoberta da generalização da expressão algébrica da derivada suscitou, conforme previsto no plano, algumas dificuldades relacionadas com o conceito de limite no contexto da diferenciabilidade. Apresentei o processo dinâmico de limite, apoiado na representação gráfica, e fui inquirindo oralmente vários alunos acerca do mesmo. Dei especial ênfase ao significado de limite dado que a existência de um conflito potencial na construção do "conceito imagem" do mesmo e a definição da t.m.v podia resultar num conflito cognitivo em aprendizagens futuras. Durante a discussão, o esboço de um intervalo da função em estudo, desenhado com outra escala por estar ampliado, originou alguma dificuldade que foi a de os alunos assumirem o mesmo como uma função distinta da função em análise. A dificuldade foi rapidamente clarificada pela professora cooperante quando referiu que se tratava da mesma função.

Esta situação fez com que refletisse e reformulasse os gráficos da Tarefa 5 - "Gráfico da função derivada", a ser resolvida numa próxima aula.

No segundo momento de discussão os alunos chegaram, oralmente, à formalização da representação algébrica da derivada de uma função num ponto do seu domínio. Esta foi escrita gradualmente no quadro à medida que iam sendo explorados os vários significados de h, $h \to 0$ e, como consequência, a alteração aos valores de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

As questões da tarefa foram todas resolvidas e discutidas em grande grupo. Estava previsto no plano uma extensão à última questão que era a de um aluno, no quadro, resolver a função em estudo ($d(t) = 2t^2 + 4$) mas aplicando a definição de derivada. Porém, tomei a decisão de a explorar com o recurso *Desmos* para reforçar a noção intuitiva de limite, o que proporcionou uma visão global qualitativa da mesma e analisar, ao longo do comportamento da função, os diferentes declives das retas tangentes.

Para consolidar a definição de derivada, seguiu-se a resolução de um exercício do manual que foi sendo resolvido por mim, no quadro, conforme as indicações/sugestões que os alunos iam dando. A resolução do exercício foi morosa dada a exploração minuciosa da turma em todos os passos. No final do exercício, e após ter questionado a turma acerca da existência de dificuldades, um aluno referiu não ter percebido o que tinha sido feito. Tentei identificar a dificuldade do aluno questionando-o: "O que não estás a perceber? Desde onde?". Obtive como resposta: "Tudo. Isso do h, a tangente, o limite, o ponto, o declive…". Dirigi-me ao quadro e recapitulei todo o processo dinâmico de limite utilizando giz de várias cores, setas indicando movimento, tangente num ponto, entre outras representações. Paralelamente ia questionando o aluno para tentar identificar onde estava a dificuldade mas as respostas identificavam compreensão (!). Após identificação da dificuldade que era o desconhecimento da definição de reta secante, e clarificação da mesma (envolvendo alguns colegas), o aluno foi respondendo corretamente às questões de focalização por mim colocadas, evidenciando a compreensão do significado da derivada num ponto. O tempo de aula tinha terminado não dando espaço para completar um dos exercícios do manual. Finalizei a aula com indicação do T.P.C. realçando a importância da execução do mesmo.

Apesar da não completude do exercício, considero que os objetivos específicos e o plano da aula foram cumpridos. Porém, ressalvo a compreensão relacional do conceito de limite que, não estando considerado como objetivo específico, está diretamente ligado à definição de derivada.

Terceira aula -17 de Abril

A terceira aula da intervenção letiva tinha como objetivos: (1) perspetivar a matemática como uma ciência em construção; (2) deduzir, calcular e interpretar geometricamente a expressão algébrica da derivada de funções afins, polinomiais do 2º grau e funções racionais do tipo $y = \frac{a}{x}, a, x \neq 0$; (3) formular generalizações a partir de problemas contextualizados na vida real; (4) construir parte do "conceito imagem" de limite; (5) explorar e articular a representação gráfica, numérica e algébrica de funções, e (6) explorar a relação entre as representações gráficas de uma função, da tangente a um ponto da mesma e sua função derivada. A resolução da Tarefa 3 – "A subida da caixa" visava o alcance destes objetivos.

A aula iniciou-se com a síntese da aula anterior. Dividi o quadro em duas partes intituladas t.m.v [a ,b] e taxa de variação, respetivamente, e com a participação dos alunos, alertando-os para a necessidade de uma escrita rigorosa, foram registadas as diferentes expressões algébricas e explorados os respetivos significados geométricos. Durante a exploração de significados fui aproveitando as expressões dos alunos para promover o rigor matemático, bem como, para motivar novas discussões em turma em torno do conceito de limite. Foi minha intenção compreender o "conceito imagem" de limite que os vários alunos iam construindo, pois era importante não haver qualquer tipo de equívoco na apreensão de significados, já que os mesmos poderiam ser a origem de conflitos potenciais. Após alguns minutos de discussão, um aluno conseguiu transmitir aos colegas, de forma correta, todo o processo dinâmico, inerente ao conceito de limite. A discussão em turma manteve-se, gerando diálogos em torno do ponto em estudo e encaminhando os alunos à construção do "conceito imagem" de limite aplicado à derivada de uma função. Os alunos chegaram à formalização da definição formal da derivada cumprindo-se assim um dos objetivos previstos. O tempo decorrido de aula evidenciava, pelas conclusões e explorações efetuadas pelos alunos, aprendizagens significativas mas o plano não estava a ser cumprido. Agravando o atraso sentido, dois alunos iniciam uma nova discussão envolvendo uma dúvida acerca do conceito de tangente que tinham construído no 3.º ciclo. Esta dificuldade, tão pertinente, não foi por mim identificada no momento mas somente após a reflexão da 4.ª aula onde, a questão emergiu de novo. O número de alunos envolvidos na discussão foi aumentando, também provocado por algumas questões de focalização e de inquirição por mim colocadas acerca do conceito de limite. Compreendi, pelas conclusões, que os alunos foram retirando ao longo da discussão, que a maior parte dos alunos tinham ultrapassado a dificuldade, mas outros ainda não. A discussão em turma foi muito ativa, porém todas as discussões inesperadas em torno do conceito de limite, causadas pelo "conceito imagem evocado" da tangente fizeram com que o rumo da aula tomasse um sentido completamente diferente do plano elaborado.

Um aluno solicitou a resolução de um exercício, o qual acedi de imediato efetuar, pensando que a representação algébrica pudesse ser mais esclarecedora para este aluno e para os colegas que conservavam algumas dúvidas. Pelo atraso que a aula já registava tomei a decisão de ser eu a resolver o exercício no quadro mas centrando a atividade na interação dos alunos. A resolução foi evidenciando algumas dificuldades ao nível do manuseamento algébrico do limite, bem como, na compreensão do mesmo. Conforme refere a teoria que fundamenta o estudo, preferi não separar as dificuldades que a teoria do conceito de limite transporta, optando por explorar com os alunos todos os significados envolvidos e que eram propostos na resolução do exercício. Após resolução e discussão do exercício, a resolução da Tarefa 3 foi iniciada em trabalho autónomo a pares, restando a parte II para trabalho de casa. A discussão da parte I da tarefa foi adiada para a aula seguinte.

Todos os objetivos específicos da aula foram atingidos exceto o de deduzir, calcular e interpretar geometricamente a expressão algébrica da derivada de funções polinomiais do 2º grau e funções racionais. Apesar dos alunos não resolverem na totalidade a Tarefa 3, na minha opinião, as várias discussões promoveram competências ao nível da capacidade de abstração, necessária à compreensão do conceito de limite, e despertaram o sentido crítico dos alunos para conceitos já estudados. Foram criados momentos de aprendizagem onde os alunos partilharam ideias e atribuíram significados. Percecionando a aula de forma genérica: considero que "desprezei" parte da resolução e a discussão da Tarefa 3 mas que "conquistei" a compreensão dos alunos, no conceito da derivada, bem como, estimulei a construção consistente do "conceito imagem" limite. A experiência enriquecedora de promover as discussões em turma motiva-me à reflexão de como poderei aperfeiçoar o meu papel de professora, como impulsionadora de uma cultura de sala de aula interativa.

Quarta aula -20 de Abril

Após ajuste do plano, a 4.ª aula da intervenção letiva tinha como objetivos a resolução de exercícios do manual e continuação da resolução/discussão da Tarefa 3.

As várias discussões imprevistas, decorridas na 3.ª aula, causaram algum atraso na planificação elaborada para a introdução das regras de derivação. Consequentemente originaram a adaptação e transição de parte do plano da 3ª aula para a 4.ª aula a lecionar. Desta forma, o plano desta aula sofreu algumas alterações, eliminando um momento de alusão à História da Matemática, porque o seu conteúdo enquadrava-se em qualquer outra aula posterior.

A aula iniciou-se com a síntese da aula anterior prosseguindo com a resolução de exercícios do manual. Solicitei um voluntário para a resolução do primeiro exercício no quadro, porém os alunos mostraram-se renitentes e não insisti. Contudo, verifiquei alguma hesitação num aluno que, após um pequeno estímulo à sua confiança, acedeu ao meu pedido iniciando a resolução da primeira alínea e mantendo-se no quadro, por iniciativa própria, para resolução de mais duas alíneas. Os vários exercícios foram resolvidos, no quadro, por diferentes alunos e posteriormente discutidos com a participação da turma. Nos momentos de discussão em turma, quando adequado, estabeleci a ponte para temas já estudados, como por exemplo sobre o tema "trigonometria" onde os alunos tiveram pela primeira vez contato com demonstrações, relembrando as várias estratégias pelas quais poderiam optar. A aula decorreu com o trabalho autónomo dos alunos, em paralelo à resolução dos exercícios no quadro. À medida que os exercícios proporcionavam outras explorações, os alunos, apoiados nalgumas representações gráficas por mim desenhadas no quadro e questões que estabeleciam conexões com outras ideias, exploraram significados geométricos e reviram os conceitos compreendidos nas aulas anteriores.

A aula prosseguiu com pares de alunos, em partes distintas do quadro, a resolverem a parte I da Tarefa 3 para posterior discussão, transmitindo, em sala de aula, uma dinâmica bastante acentuada. Numa das questões verifiquei, aquando da monitorização do trabalho autónomo, que os alunos optaram por três estratégias de resolução diferentes, duas delas previstas no plano. As diferentes estratégias foram resolvidas no quadro pelos diferentes alunos o que facultou a exploração e articulação da representação gráfica, numérica e algébrica que direcionaram a turma a "descobrir" a regra de derivação de funções afim. Ainda, inserido no momento de discussão, um aluno teve oportunidade, apoiado na representação gráfica, de se auto clarificar ("Claro, já percebi; o que estava a dizer não está certo") acerca de uma dúvida que estava a colocar à turma.

Os vários diálogos entre os alunos proporcionaram um momento, não previsto no plano, que me fez representar em paralelo dois eixos cartesianos: um para a representação gráfica de $f(x)$, e outro, para $f'(x)$, com o objetivo de promover nos alunos a distinção e a compreensão da diferença entre os mesmos. Este momento, após discussão em turma, resultou na verbalização de um aluno, posteriormente apoiada por toda a turma, do objetivo global da parte I da Tarefa 3, ou seja, concluir que a derivada de uma função afim é uma função constante. Para além do objetivo alcançado os alunos chegaram à generalização da derivada de uma função quadrática [função afim], prevista na parte II da tarefa.

A aula terminou com a síntese dos conteúdos, no quadro, "descobertos" pelos alunos, acabando por ficar adiada para a aula seguinte a discussão da parte II da Tarefa 3 que, conforme notas de campo, já se encontrava resolvida por grande parte dos alunos. Não foi projetado o *PPT* preparado nem explorado o recurso *Desmos* pela ausência de eletricidade.

Como nota final devo referir que a experiência de lecionar esta aula trouxe-me a total recompensa ao trabalho de preparação e reflexão previamente elaborado. Cooperar com os alunos para que estes desenvolvam as suas capacidades de formular, pensar e comunicar matemática é, na minha opinião, um objetivo intrínseco de qualquer planeamento.

Quinta aula -23 de Abril

A aula tinha como objetivos: (1) a clarificação da definição geral de reta tangente; (2) a sintetização das regras de derivação e estudo dos pontos angulosos de uma função, a integrar na discussão da parte II da Tarefa 3, e (3) resolução de exercícios do manual.

Comecei por clarificar a definição geral de reta tangente que foi feita, no quadro, com base numa representação gráfica de uma função sinusoidal. No momento lembrei-me de abordar o estudo da vizinhança de um ponto com um exemplo prático em sala de aula porque o termo "vizinhança" podia não ter sido compreendido pelos alunos. Como exemplo, recorri aos alunos mais próximos de mim, referindo que se quisesse estudar a minha vizinhança consideraria os alunos que me estavam mais próximos. Dirigindo-me para o fundo da sala disse que se quisesse agora estudar a minha vizinhança já não iria recorrer aos mesmos alunos mas sim a outro aluno que se localizava ao meu lado. No quadro, assinalei no gráfico, com diferentes cores as vizinhanças de cada ponto e com base num slide projetado passei a definição geral de reta tangente. Favoreci espaço para o aparecimento de dúvidas mas os alunos não colocaram nenhuma referindo que tinham compreendido a "nova" definição.

Como grande parte dos alunos tinha resolvido a parte II da Tarefa 3 na aula anterior e em casa, o momento seguinte foi dedicado à sua resolução, pelos alunos, no quadro, seguido de discussão em grande turma. Durante a discussão de uma das questões foi explorado, pelos alunos, os pontos angulosos de uma função. Para que os alunos tivessem uma base de raciocínio, representei no quadro o gráfico da reta $x=1$num referencial cartesiano e questionei a turma acerca do seu declive. Apoiada na resposta a uma possível dificuldade dos alunos, prevista no plano, solicitei a um aluno que indicasse dois pontos pertencentes à reta $x=1$ e que encontrasse o seu declive. Após alguma discussão em turma, os alunos chegaram à conclusão que $x=1$ não era uma função, pelo que a derivada de uma reta vertical não estava definida. A resolução e discussão de toda a parte II da tarefa permitiu aos alunos, sem aparentes dificuldades, chegarem à generalização de todas as regras de derivação propostas na UE.

Seguidamente foi projetado um slide e distribuídas cópias com a síntese das aprendizagens referentes à derivada de uma função e quadro resumo das regras de derivação. Este último serviu de apoio ao momento seguinte que foi o da resolução de exercícios do manual.

Ao verificar que o tempo de aula decorrido estava adiantado cinco minutos em relação ao plano, projetei o *PPT* com a alusão à História da Matemática. Os alunos mostraram-se muito atentos e ouvi o comentário: "Isto foi o que fizemos!".

Na preparação do plano desta aula senti o desafio de como proporcionar bons momentos de discussão na resolução de simples exercícios de aplicação e não limitar o momento da resolução de cada exercício ao manuseamento algébrico. A estratégia que adotei, recorrendo às possíveis dificuldades dos alunos nas questões da Tarefa 3 indicadas no plano, foi a de não esperar que estas pudessem acontecer mas sim questionar oralmente os alunos adaptando essas possíveis dificuldades aos exercícios propostos. Os alunos resolveram, no quadro e sem grande dificuldade, os exercícios indicados seguindo-se o momento de discussão em grande turma. Ao longo da aula, quer nas discussões em turma ou individualmente, realcei os dois processos de encontrar o valor da derivada de uma função; pelas regras ou por definição. Procurei estabelecer o paralelo entre os exercícios propostos e as tarefas já realizadas para promover a construção do "conceito imagem" de limite. Durante a discussão em turma dos exercícios resolvidos, alguns alunos foram questionados sobre os raciocínios referidos por outros colegas, tornando a aula dinâmica e com o envolvimento da maior parte da turma. Os diálogos estabelecidos em sala de aula, a participação ativa dos alunos nos vários momentos da mesma, a construção de significados e ausência de grandes dificuldades na resolução dos exercícios, são possíveis indicadores de que os objetivos definidos foram atingidos. O plano de aula não sofreu desvios a não ser a inclusão da alusão à História da Matemática dado que "amplia a compreensão dos assuntos matemáticos com os dados da sua génese e evolução ao longo do tempo" (ME, 2001, p. 19).

CAPÍTULO 4 - MÉTODOS DE RECOLHA DE DADOS

4.1 Métodos e procedimentos de recolha de dados

Atendendo ao objetivo e às questões do estudo, os métodos e procedimentos de recolha de dados utilizados foram: (1) a observação participante (com graus distintos de participação) apoiada na elaboração das notas de campo, na gravação vídeo de todas as aulas lecionadas e no registo áudio da resolução da Tarefa 5, e (2) a recolha documental, onde se inserem as resoluções escritas das tarefas e do teste de avaliação bem como as respostas ao questionário.

Observação participante

A observação participante, com graus distintos de participação, incidiu nas aulas por mim lecionadas e nas lecionadas pela Prof.ª Inês Campos.

As questões do estudo inserem-se não só no contexto lecionado; diferenciabilidade, mas também no contexto de funções racionais e sucessões, o que me conduziu a registar as estratégias dos alunos que emergiram de discussões em grande grupo, conflitos cognitivos evidenciados, entre outros, referentes ao conceito de limite, inserido nos últimos contextos mencionados. Nas aulas lecionadas pela Prof.ª Inês Campos, apropriei-me do papel de observadora com um grau reduzido de participação que incidiu, essencialmente, num ouvir de modo "interpretativo que visa compreender as ideias e pensamento [dos alunos]" (Menezes, 2014, p. 10). Também assumi este papel menos participativo porque tive presente que "é necessário calcular a quantidade correta de participação e o modo como se deve participar" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 125).

No período da lecionação procurei, apesar do foco da minha atenção ser o processo de ensino aprendizagem que envolve gerir simultaneamente um número alargado de funções profissionais, assumir o papel de observadora com maior grau de participação. A multiplicidade de focos de atenção, entre outros, que são exigidos ao professor não torna a tarefa de observadora participante de fácil execução (Cohen et al., 2007). Para além de ouvir os alunos, tive de interpretar o que dizem, saber como colocar as questões de modo a encaminhar o aluno a uma aprendizagem significativa e saber selecionar o que ocorre, para melhor "decidir qual é a evidência da observação" (Cohen, Manion & Morrison, 2007, p. 396).

O papel de observadora participante permitiu um acesso direto a interações (professor/aluno/alunos) focadas no objetivo do estudo, estabelecer relações de confiança com os alunos e observar o que aconteceu em sala de aula, o que inclui comportamentos não-verbais (Choen et al., 2007). Muitas vezes os alunos não transmitem tudo, porque pensam que pode ser incorreto ou que não é relevante. Os processos característicos do papel de observadora participante abrangeram as questões de focalização, inquirição e orientadoras (Menezes et al., 2014) formuladas a um aluno ou ao grupo nos momentos de discussão, entre outros.

Da observação em sala de aula procurei fazer registo de ideias e estratégias que emergiram de discussões em grande grupo, "erros" dos alunos, entre outros, recorrendo à elaboração de ***notas de campo***. As notas de campo induziram alterações de estratégias metodológicas que acompanharam o desenvolvimento do estudo bem como foram de maior conveniência para as reflexões subsequentes ao período de lecionação. Sempre que possível, procurei estruturar os meus registos, isto é, realizar uma "observação estruturada" (Cohen et al., 2007). Tentei estabelecer e assinalar, ao momento, conexões entre os registos recolhidos e as dificuldades reportadas na fundamentação teórica já estudada, o que se veio a revelar vantajoso, como por exemplo, na análise de dados do estudo.

Pretendi que estes registos fossem os mais detalhados e precisos possíveis para fornecerem resultados significativos à identificação de processos cognitivos e de raciocínio dos alunos (Bogdan & Biklen, 1994). Realço a importância temporal da execução dos mesmos, ou seja, foram elaborados ao longo das experiências assistidas e completados, imediatamente após o tempo de aula, com alguma informação que achei relevante; o tempo, por vezes, atraiçoa a memória dos factos.

Registar alguns pormenores do que ocorreu, ser o mais imparcial possível, não considerar juízos de valor, ser objetiva e descrever diálogos relevantes para análise foram alguns dos aspetos adotados (Bogdan & Biklen, 1994). O ***vídeo*** de todas as aulas lecionadas e fiel à realidade dos factos proporcionou, após visualização e transcrição de alguns momentos relevantes para o estudo, uma descrição da intervenção letiva apresentada por ordem cronológica, refletindo as estratégias utilizadas, as dificuldades e aprendizagens dos alunos bem como as alterações efetuadas à planificação, com a respetiva justificação.

Utilizei o ***registo áudio***, pontualmente durante a realização da Tarefa 5, na aula subsequente à intervenção onde, com dois pares de alunos, efetuei diálogos. O critério para a seleção dos pares passou, essencialmente, pela facilidade de comunicação e por opções de aprendizagem distintas. Um par é tendencialmente ligado a procedimentos algébricos, outro nem por isso, conforme reportou a Prof.ª Inês Campos. A seleção do registo áudio para esta situação passou pelo objetivo específico da tarefa pois esta está fortemente direcionada para os alunos explorarem o conceito de limite por observação da representação gráfica o que comportou, essencialmente, a utilização de linguagem natural. O registo áudio serviu para compilar alguma informação que pudesse ter escapado durante a recolha escrita dos dados.

Recolha documental

Na recolha documental inserem-se as produções escritas dos alunos tais como as respostas ao questionário, as resoluções escritas das tarefas e do teste de avaliação.

Questionário

Tall e Vinner (1981) referem que o "conceito definição" pode ser vazio ou virtualmente inexistente quando os alunos iniciam o estudo do conceito de limite e uma investigação realizada por Fernández-Plaza, Rico e Ruiz-Hidalgo (2011) apresenta alguns resultados acerca dos diferentes significados intuitivos que os alunos possuem perante o conceito de limite de uma função num ponto ao utilizarem diferentes representações como a numérica, gráfica, simbólica (*R3*) e linguagem natural. Estas condições motivaram-me a recolher alguns dados sobre os significados e conceções de limite dos alunos desta turma de 11.º ano no "vazio", ou seja, "fora" de um contexto matemático. Para isso, apliquei um questionário de resposta aberta aos alunos (Anexo IV), onde foi explorada a representação em linguagem natural e numérica do limite, antes de qualquer abordagem de limite matemático. Este questionário pretendeu explorar os significados que os alunos associam a termos linguísticos específicos (linguagem natural) como "tende para", "limite", entre outras, e foi aplicado em toda a turma.

O questionário, por ser de resposta aberta, possibilitou liberdade de expressão e não procurou nenhum processo de raciocínio particular dos alunos (Cohen et al., 2007) bem como "é devidamente enquadrado para a investigação de assuntos complexos, onde é difícil ministrar simples respostas" (Cohen et al., 2007, p. 321), como por exemplo o "conceito imagem" da palavra limite.

Tive em conta que o material recolhido pudesse ser superficial, pois os alunos por vezes dizem o que “acham que pensam” e não o que efetivamente pensam, o que vai ao encontro do que refere Tall (1993), no contexto matemático, quando menciona que o aluno pode achar que compreende o conceito de limite, porque encontra os resultados certos na manipulação algébrica de um limite mas, efetivamente pode não compreender o conceito que lhe é inerente.

Ponderei a hipótese da utilidade do questionário, dada a elevada incerteza nos resultados que este tipo de recolha de dados pode conter (Cohen et al., 2007). Contudo, conforme refere Tall (1993), uma dificuldade dos alunos pode estar ligada à representação “etimológica” da palavra limite, o que me levou a aplicar o questionário no contexto da língua Portuguesa.

No dicionário da língua portuguesa - Priberam *online*, a palavra limite significa: termo, meta em língua portuguesa ou, inserida num contexto matemático, uma quantidade fixa de que uma variável se aproxima indefinidamente sem nunca a alcançar.

Como é que algo que tem termo pode ser $\pm\infty$? Como é que algo “tão pequeno quanto eu queira” pode ter termo? Estas situações vêm ao encontro de Tall (1993) quando refere que “Dificuldades encapsuladas na linguagem (fonética), termos como “limite”, “tende para”, “aproxima-se de”, têm significados coloquiais muito fortes que colidem com conceitos formais” (Tall, 1993, p. 14), citando Cornu (1981). Estes termos serviram de base para a elaboração do item 1 do questionário, bem como foram escolhidas algumas imagens, item 2, que presumem a figuração dos mesmos.

O item 1 teve como objetivos:

a) Verificar se as expressões linguísticas “tende para” e “tão próximo quanto eu queira” eram consistentes com o processo dual “x tende para (variável independente); $f(x)$ aproxima-se de (variável dependente) ”. As respostas foram analisadas segundo a utilização, ou não, das expressões “aproximação”, “próximo de” na explicitação do significado que o aluno atribuiu ao termo “tende para” ou vice-versa.
b) Verificar se as expressões linguísticas “limite” e “tem limite” eram consistentes com a inatingibilidade, ou não, do limite. As respostas foram analisadas segundo a utilização, ou não, das expressões “alcançar”, “ter fim”, “acabar”, “ser ou não exato” na atribuição de significado.

c) 1. Verificar se as expressões linguísticas "infinitamente grande" e "infinitamente pequeno" eram consistentes, no contexto do tema das sucessões" com a definição formal de infinitamente grande positivo / infinitamente pequeno (infinitésimo)

2. Verificar se as expressões linguísticas "limite", "infinitamente grande" e "infinitamente pequeno" poderiam ser fatores de "conflito potencial" na relação entre o valor de $f(x)$ ficar arbitrariamente grande quando a variável independente se aproxima de "a" $(x \to a, valor\ numérico)$ ou quando $x \to +\infty$, $f(x)$ aproxima-se de um valor real ou seja $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, b \in R$.

O item 2 teve como objetivos verificar se os alunos se limitavam a relacionar as imagens com as expressões indicadas no item 1 ou se para além disso relacionavam ou concebiam outras características/qualidades de uma classe de objetos abstratos ou concretos como por exemplo a música e procurar compreender como construíam o "conceito imagem" da palavra limite.

A inserção da representação numérica no questionário, item 3, teve como objetivo evidenciar algum processo "erróneo" dos alunos na manipulação algébrica de uma função, bem como despertar nos alunos, desde já, à possibilidade de aplicarem essa representação quando iniciassem o estudo intuitivo de limite.

Na última aula do tema lecionado solicitei a parte dos alunos da turma que consultassem as suas respostas ao questionário perguntando-lhes se, após as aprendizagens no estudo das assintotas de uma função e a diferenciabilidade alterariam alguma das suas respostas e porquê. Os alunos selecionados para responderem a esta questão foram os que geraram respostas iniciais que, numa primeira análise/caraterização efetuada sobre os dados recolhidos, me suscitaram mais dúvidas de interpretação. Desta forma, completei a recolha documental com a clarificação de algumas situações, para mim, menos evidentes (Cohen et al., 2007).

Era minha intenção aplicar o mesmo procedimento após o estudo das sucessões mas a limitação no tempo não o permitiu.

Resoluções escritas dos alunos

As resoluções dos alunos às tarefas propostas e inseridas na recolha documental retrataram qual o "conceito imagem" de limite que os alunos constroem e como utilizam o conceito do mesmo por meio de algumas das suas dificuldades evidenciadas. Estas resoluções foram realizadas maioritariamente em sala de aula, durante a intervenção letiva, tendo sido as mesmas fulcrais para o objetivo de estudo, pois serviram para responder às questões do trabalho suportando as análises realizadas. A recolha procedeu-se no final de cada aula lecionada, após discussão em turma. Na 3.ª aula lecionada, na recolha da Tarefa 3 foi aplicado outro procedimento. A parte I da Tarefa 3 foi iniciada em trabalho autónomo a pares durante a aula porém, a sua discussão foi adiada para a aula seguinte. A parte II restou para trabalho de casa contudo foi completada na 4.ª aula. Desta forma, foram recolhidos dois registos: (1) a parte I sem discussão prévia, e (2) a parte II resolvida em casa e durante a 4.ª aula onde, por atrasos imprevistos, não foi feita a discussão que tomou lugar na 5.ª aula. Os enunciados das tarefas não foram recolhidos e sempre havia uma reserva dos mesmos para os alunos "mais esquecidos".

O teste de avaliação foi recolhido pela Prof.ª Inês Campos, no final da aula de dia 30 de abril e, no dia em que estes foram distribuídos aos alunos, já com a avaliação e "feedback" da Prof.ª Inês Campos, foram retiradas as fotocópias que serviram de registo.

Optei pela diversificação das técnicas de recolha de dados porque, se recolhesse dados utilizando uma só técnica o cruzamento entre estes ficaria diminuto por estar dirigido para uma só configuração de análise ou seja, procurei contribuir para "uma visão holística da investigação" (Cohen et al., 2007, p. 134).

De modo a salvaguardar questões de ordem ética, o objetivo do estudo e as situações de participação foram previamente explicitadas, as autorizações dos Encarregados de Educação solicitadas antecipadamente (Anexo I) e as identidades dos alunos protegidas, quer na informação escrita como verbal ao longo do estudo.

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE DADOS

5.1 Procedimentos de análise, com incidência na componente investigativa

No 11.º ano os alunos ainda não tiveram contato com a definição formal de limite onde, segundo Tall e Vinner (1881), assenta o "conceito definição". Desta forma, a análise recai sobre o "conceito imagem" de limite que os alunos foram construindo e utilizando ao longo dos vários contextos: estudo das assintotas, derivadas e sucessões reais de variável real onde o "conceito definição", fração do "conceito imagem" de limite, é sustentado por interpretações pessoais que possam ser expressas por palavras e escrita matemática (respeitando o nível de conhecimento em que o aluno se encontra).

Tendo como objetivo compreender como os alunos da turma construíram e utilizaram o conceito de limite, ao longo de uma sequência de ensino que privilegiou uma abordagem intuitiva em contextos diversos (funções racionais, derivada e sucessões) e quais as dificuldades que evidenciaram, analisei os processos cognitivos ("erróneo" ou "bem-sucedido") dos alunos, como por exemplo na questão 4.1 da Tarefa 5 onde é solicitada a justificação da representação gráfica da função derivada ($h'(x)$) da função dada ($h(x)$), baseada no "conceito imagem" de limite construído. Explorei o "conceito definição" (fração do "conceito imagem" de limite) decorrente de um processo cognitivo, que deve ser "distinguido do conceito matemático formal" (Tall & Vinner, 1981, p.151), o que obrigou a uma análise em toda a sua complexidade, como por exemplo na questão 1.5 da Tarefa 2 onde é solicitado ao aluno, após estabelecer um processo cognitivo, uma conjetura sobre a reta tangente a um ponto da função, que o dirige à definição da derivada num ponto (utilização do conceito de limite).

Neste capítulo são também analisados alguns aspetos onde a estrutura informal do "conceito imagem evocado" pode gerar conflitos cognitivos (dificuldades/confusões) quando os alunos, no futuro, se depararem com a definição formal de limite.

Considerei que analisar dificuldades é compreender incoerências que os alunos estabelecem com o conceito de limite. Estas dificuldades podem provir de fatores de conflitos potenciais que, quando acionados em simultâneo ("conceito imagem evocado"), geram conflitos cognitivos (dificuldades/confusões). Estes conflitos cognitivos podem ocorrer nos momentos da futura introdução da definição formal de limite, conforme já referido, ou em situações que envolvem propriedades do limite e/ou processos já estudados, causando processos "erróneos" que também são, neste estudo, alvo de análise. Assim, analisar um processo "erróneo" é analisar uma deficiente construção e/ou utilização do conceito de limite ou seja um "conceito imagem" pouco consistente. O processo "bem-sucedido" que resulta de um "conceito imagem" consistente e, portanto, de uma compreensão relacional, será analisado quando oportuno e ponderado como contraponto ao processo "erróneo".

Considerei como conclusão errónea o resultado de um processo "erróneo" conclusivo que possa entrar em contradição com o "conceito definição", que ao nível do 11.º ano se desenvolve de modo intuitivo e formal, e procurei compreendê-la através das dificuldades evidenciadas: fatores de conflito cognitivo, referentes a propriedades (Ex: "o limite nunca é alcançado") ou a processos (Ex: "à medida que x se aproxima de a, $f(x)$ aproxima-se de c" - Processo dinâmico).

Por último procurei perceber como é que os alunos ultrapassaram algumas das dificuldades manifestadas já que, por limitação do tempo que este estudo comporta, a reconstrução do "conceito imagem" de limite dificilmente tem lugar.

Tendo em conta o âmbito do estudo, onde o objetivo global da intervenção letiva foi o de os alunos não só compreenderem o conceito de derivada (tema fundamental da unidade a lecionar) mas também o de iniciarem a construção do "conceito imagem" de limite em contextos diversos, comecei por sistematizar (Quadro II) o processo "erróneo"/"bem-sucedido" com base na teoria que fundamenta o estudo e que faculta algumas respostas às questões do mesmo.

Após a sistematização atrás referida, analisei os dados recolhidos (notas de campo, transcrição vídeo das aulas, respostas ao questionário, resoluções dos alunos/tarefa, registos áudio e teste de avaliação) com o objetivo de compreender algumas dificuldades/conflitos cognitivos genéricos evidenciados em turma. Como nota, refiro que durante o ano letivo optei por ir registando as principais dificuldades dos alunos, que à partida evidenciavam interesse para a elaboração futura deste relatório. O resultado desta atividade proporcionou que a análise preliminar atrás referida fosse mais detalhada facilitando, em particular, a análise presente, no contexto das funções racionais e sucessões reais de variável real.

Organizei, seguidamente, segundo fundamentação teórica do estudo, algumas das principais características do "conceito imagem" de limite que podem refletir a construção e consequente utilização na resolução de tarefas do conceito de limite, o que originou distintas áreas sujeitas a reflexão e possíveis alvos de análise. As tabelas abaixo apresentadas auxiliaram a caraterizar, genericamente, parte das situações que podem ocorrer num processo "bem-sucedido" (Tabela II) ou num processo "erróneo" (Tabela III). Porém não os tomei como estanques a novas situações que pudessem emergir no decorrer da análise.

Tabela II – Processo cognitivo "bem-sucedido"

Algumas das principais características do processo cognitivo "bem-sucedido"- "conceito imagem" consistente	
Construção do "conceito imagem" de limite	***Utilização do conceito de limite na resolução de tarefas***
Não há evidência de existência de fatores de conflito potencial	Se existir um conflito cognitivo, o aluno tenta reconciliar as noções que tinha com as novas reconstruindo uma coerente estrutura cognitiva isto é, clarifica as suas dificuldades
Evidência de compreensão relacional	Utilização das várias representações (R3) e revelação da existência de conexão entre elas
Conhecimento matemático situado no "mundo" perceptual – 2.º "mundo" (Juter, 2008)	Utilização da manipulação algébrica revelando compreensão do conceito ou seja, utilizar o processo de 'fazer' (procedimento) conjuntamente com um conceito, para pensar (*procept*)
As propriedades do limite são expressas com compreensão do conceito (revelação de compreensão relacional)	Utilização do conceito de limite nos vários contextos; funções racionais, diferenciabilidade e sucessões
O "conceito definição" integra interpretações pessoais que possam ser expressas por palavras e escrita matemática (revelação de compreensão relacional)	Utilização de, como por exemplo, "se $x \to a$, então $f(x)$ aproxima-se de b"
Reconhecimento de uma função como um processo e não como um objeto que pode induzir a determinados procedimentos algébricos sem atribuição de significado ou seja compreensão da definição de função, como por exemplo, considerar o seu domínio (Juter, 2008)	Utilização do conceito de limite em pontos de uma função que não pertencem ao seu domínio, caso do estudo dos limites laterais (revelação de compreensão relacional)

Tabela III - Processo cognitivo "erróneo"

Algumas das principais características do processo cognitivo "erróneo" "conceito imagem" inconsistente	
Construção do "conceito imagem" de limite	***Utilização do conceito de limite na resolução de tarefas***
Há evidência de existência de fatores de conflito potencial	Utiliza os métodos práticos para resolver problemas (Ex: manipulação algébrica) separados da teoria "problemática" porque ao existir um conflito cognitivo, o aluno mantém o elemento conflituoso num compartimento separado, ou seja, não "permite" que os fatores de conflito potencial se transformem em fatores de conflito cognitivo.
Evidência de compreensão instrumental	Utilização das várias representações (R3) sem estabelecer conexão entre elas
Conhecimento matemático ainda não situado no "mundo" corporificado – 1.º "mundo" (Juter, 2008)	Ausência da utilização da perceção física do mundo real para realizar experiências mentais de conceitos matemáticos onde está incluída a noção intuitiva de limite
As propriedades do limite são expressas sem compreensão do conceito (revelação de compreensão instrumental)	- Utilização adequada de procedimentos algébricos do limite nos vários contextos (funções racionais, diferenciabilidade e sucessões) porém existe ausência de conexões entre os mesmos - Utilização do processo dinâmico de limite "se $x \to a$, então $f(x)$ aproxima-se de b", por memorização
O "conceito definição" não integra interpretações pessoais que possam ser expressas por palavras e escrita matemática (revelação de compreensão instrumental)	- Ausência da utilização do "conceito definição", revelando que a sua construção ainda não foi iniciada, como por exemplo, "O que é isto do $h \to 0$?" - Ausência de utilização de objetos abstratos ($h \to 0$)
Reconhecimento de uma função como um objeto o que induz a determinados procedimentos algébricos sem atribuição de significado (Juter, 2008)	Ausência, por falta de compreensão, da utilização do processo dinâmico de limite "se $x \to a$, então $f(x)$ aproxima-se de b"
No "conceito imagem" o papel da resolução algébrica adquire primeira prioridade	Procura constante da utilização do manuseamento algébrico na resolução de problemas

Comecei por uma análise preliminar dos diversos dados recolhidos registando algumas situações que pudessem revelar processos "erróneos" ou "bem-sucedidos".

Seguidamente selecionei algumas dessas situações com o objetivo de as apresentar neste estudo. O principal critério de seleção passou pela minha avaliação à pertinência da sua inscrição nas respostas às questões de investigação que são:

- Qual o "conceito imagem" de limite que os alunos constroem, ao longo da unidade de ensino, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?
- Como é que os alunos utilizam o conceito de limite na resolução de tarefas que o envolvem, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?

Em resumo, analisei quais as diferentes construções do "conceito imagem" de limite, suas utilizações e dificuldades mais evidenciadas pela turma que, seguidamente, deram origem a uma análise das frações do "conceito imagem" de limite de alguns dos alunos (Aluno N.º). Este aluno adquire assim o papel de representante da turma em alguns dos contextos evidenciados já que, segundo Tall e Vinner (1981), o "conceito imagem" de limite difere de indivíduo para indivíduo, podendo vir a ser alterado no tempo.

5.2 Análise dos dados dos alunos e do "conceito imagem" de limite de alguns dos seus representantes

1. *Conflito cognitivo (dificuldade) – "Inatingibilidade" do limite*

Na 3.ª aula lecionada foram explorados, em paralelo, os conceitos de t.m.v. [a, b] e taxa de variação [a, b] dado que na aula anterior a resolução da questão 1.5 da Tarefa 2, que se prende com a descoberta da generalização da expressão algébrica da derivada gerou algumas dificuldades relacionadas com o conceito de limite, no contexto da diferenciabilidade.

Estavam a ser explorados os vários significados de: $h \to 0$, a razão incremental $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ com $(h = b - a)$ e finalmente $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para seguidamente se explorar o conceito de limite (Figura 10).

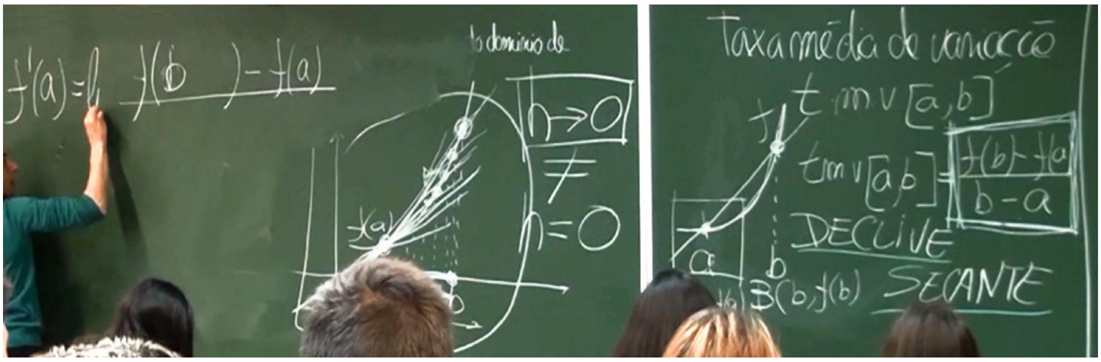


Figura 10 - 3.ª aula lecionada - Contexto diferenciabilidade

Surgiram, na discussão em turma e na maior parte dos alunos, dois fatores de conflito potencial que acionados em simultâneo geraram um conflito cognitivo. A análise recai nos "conceito imagem" do Aluno 2 e no do Aluno 8, que representam a dificuldade evidenciada em turma.

> **Aluno 2** [*a explorar o conceito de limite*]: Então nunca vamos calcular quando o "h" é zero, vamos ver o que é que acontece ao declive da reta [secante] quando o h tende para zero.
> **Prof.ª:** Exatamente.

O Aluno 2 revela que sabe utilizar o objeto abstrato $h \to 0$ ao explicar a diferença entre este e a sua possível substituição por zero (manuseamento algébrico) e evidência uma compreensão relacional do conceito de limite, no contexto da diferenciabilidade, quando utiliza o processo de fazer h a tender para zero conjuntamente com o processo dinâmico do declive da secante, em limite, resultar no declive da tangente, o que o situa no 2.º "mundo" ("mundo" perceptual). Deste modo, a sua construção do "conceito imagem" de limite revela: (1) um processo "bem-sucedido"; (2) que o "conceito definição", fração do seu "conceito imagem", já integra uma interpretação pessoal expressa só por palavras, e (3) que utiliza a representação gráfica e simbólica (indicadas no quadro) revelando conexão entre ambas.

> **Aluno 8:** Mas nunca vamos ter uma "tangente mesmo a sério" porque são sempre dois pontos muito próximos [a, a+h].

O Aluno 8 anuncia o primeiro fator de conflito potencial que é o do intervalo [a, a+h] ter sempre uma amplitude o que reflete a ausência da utilização do objeto abstrato $h \to 0$.

Aluno 2: Mas sabes que uma tangente é algo que só toca num ponto!

Aluno 8: Mas podes não ter…

O Aluno 8, ao referir "Mas podes não ter" está a conjeturar que a reta tangente a um ponto da função pode intersetar a função num outro ponto da mesma, logo não podia ser considerada tangente. Esta conjetura tem por base a definição de tangente lecionada no 3º ciclo, isto é, "A reta tangente a uma circunferência num ponto é definida como a reta que interseta a circunferência exatamente, e só, nesse ponto". Desta forma, surge o segundo fator de conflito potencial.

Estes dois fatores de conflito potencial, acionados em simultâneo, são agora fatores de conflito cognitivo porque causaram o conflito cognitivo (dificuldade) que é o da "inatingibilidade" do limite. A construção do "conceito imagem" de limite deste aluno não comporta um valor exato para o declive da reta tangente dado que esta "não existe". Por entrarem em conflito com uma definição formal, que é a de derivada, estes fatores de conflito potencial são do tipo mais grave.

Aluno 2: Assim não vais ter [respondendo ao Aluno 8], mas existe.

Quando o Aluno 2 refere "Assim não vais ter", evidencia que compreendeu o que o colega estava a conjeturar. Porém, não o clarificou, demonstrando que o seu "conceito imagem evocado" de limite, apesar de no início da discussão se revelar consistente, nesta fase passou a inclui o fator de conflito cognitivo que se refere à definição de tangente. Contudo, ao aceitar a sua existência ("mas existe"), revela que sabe utilizar o objeto abstrato $h \to 0$. Ao não clarificar o colega, o aluno revela separar a teoria "problemática" (definição de derivada num ponto do domínio da função) do elemento conflituoso (definição de tangente lecionada no 3º ciclo) tornando-o "encapsulado" (escondido) ou seja, este elemento conflituoso passou, no seu caso, de fator de conflito cognitivo a fator de conflito potencial. Desta forma, a consistência do seu "conceito imagem" diminuiu o que o encaminhou a não participar na consequente discussão teórica em turma, acerca do conceito de limite.

Este aluno evidencia compreensão instrumental do conceito de limite no contexto da diferenciabilidade porque se foca na diminuição da amplitude do intervalo $[a, a + h]$ ou seja, $h \to 0$ (que não representa, no seu caso, um fator de conflito cognitivo) porém, não evidencia compreender (porque não o consegue explicitar utilizando o conceito de limite) como é que a tangente "é tangente" ao intersetar, simultaneamente, dois pontos da função.

A construção do "conceito imagem" de limite do Aluno 8, bem como da maior parte da turma (porque a discussão manteve-se envolvendo outros alunos), ocorreu de forma diferente da do Aluno 2, ou seja, o "conceito imagem" de limite, que comporta a "inatingibilidade" do mesmo, é gerado por duas vertentes: (1) "a tangente poderia nunca ser tangente", e (2) a amplitude do intervalo [a, a+h] deveria ser sempre considerada, ou seja, os alunos não utilizam o objeto abstrato $h \to 0$. Deste modo, revelam a ausência de compreensão relacional dado que não compreendem que o declive das várias secantes pode resultar no declive da tangente (método a aplicar) mas só em limite (porque é que este método funciona).

Os alunos, de modo geral, revelaram que estavam localizados no 1.º mundo ("mundo corporificado") dado que estes dois fatores de conflito cognitivo apareciam, como dois elementos dispersos, na construção do conceito de limite.

Seguiu-se a clarificação de que a derivada de uma função num ponto tem sempre um intervalo associado ou seja, quando calculamos o limite num ponto estamos a localizar esse ponto num intervalo específico da função. Porém, o fator de conflito cognitivo (a tangente só poderá tocar num ponto da função) "transitou" de um intervalo $[a, a + h']$ para o intervalo $[a, a + h]$, com $h' > h$ mantendo-se a dificuldade manifestada em turma retratada pela discussão que se segue, entre os Alunos 1, 3, 8 e 9.

O Aluno 2 não participou na discussão o que corrobora a análise anterior. Contudo, o Aluno 8 manteve-se na discussão revelando que era sua intenção reconciliar as noções que detinha da definição da tangente e da amplitude do intervalo $[a, a + h]$, com o "conceito imagem" de limite que estava vindo a construir.

> **Prof.ª:** Os dois [Alunos 2 e 8] estão a discutir o conceito de limite. O limite não é considerar o *h=0*, é h a tender para zero o que faz com que a função "se aproxime de…".

A turma manteve-se em silêncio evidenciando (porque de modo geral a turma é participativa) que a dificuldade ainda não tinha sido clarificada.

A expressão facial "hesitante" do Aluno 9 fez com que eu o questionasse acerca do que era a taxa de variação.

Aluno 9: A taxa de variação no ponto a será o <u>declive da reta secante</u> ao ponto a quando b se aproxima de a. [em resposta à questão colocada]

O fator de conflito cognitivo (amplitude do intervalo $[a, a+h]$) está presente na construção do "conceito imagem" de limite do Aluno 9.

Prof.ª: A turma está de acordo com a observação do Aluno 9? Aluno 1, estás de acordo?
Aluno 1: Não porque nós vimos que a reta secante vai ligar dois pontos diferentes e se o b se aproxima de a não vai ser uma secante, vai ser uma tangente porque vai ser só um ponto.

O Aluno 1 evidencia um "conceito imagem" de limite consistente porque o seu "conceito definição" de limite começa a ser construído com base numa compreensão relacional. O aluno relaciona o b a aproximar-se de a com "a secante a transformar-se em tangente" sendo este o conjunto de palavras que o aluno utiliza, para especificar o seu conceito de limite. O "conceito imagem evocado" traduz a utilização do processo dinâmico "$se\ x \to a, então\ f(x) aproxima - se\ de\ b$".

Aluno 8: Só se os matemáticos decidiram por convenção… dado que são dois pontos tão perto!
Alunos: Alguns sorrisos…

O Aluno 8 revela, novamente, os fatores de conflito cognitivo que são os da definição de tangente lecionada no 3.º ciclo e o da amplitude do intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{h}]$.

Prof.ª: Temos aqui duas situações: A discussão entre o Aluno 8 e o Aluno 1, que afinal a reta "tangente não é bem tangente", que não se pode chamar tangente… e a questão inicial do Aluno 9 acerca da taxa de variação. Aluno 3 [de braço no ar] vais discutir qual situação?
Aluno 3: A do Aluno 9. A taxa de variação é o declive da tangente.
Prof.ª: O Aluno 3 diz que é o declive da tangente e tu Aluno 9 o que disseste?
Aluno 9: Que era o declive da secante porque não pode ser tangente visto que <u>há dois pontos diferentes</u>.

O Aluno 9 explicitou o conflito cognitivo existente na turma que é o da "inatingibilidade" do limite originado pelo processo "erróneo" que se traduz: "se a secante nunca pode ser tangente então nunca existirá declive da tangente" ou seja:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \neq c, c \epsilon R$$

Aluno 8: É isso mesmo! [confirmando a presença dos fatores de conflito cognitivos]

Apoiado na representação gráfica que "esboçava o decréscimo da amplitude do intervalo $[a, a+h]$" o Aluno 3 transmitiu novamente à turma a sua opinião acerca do argumento do Aluno 9.

Aluno 3: Ele tem razão, a reta vai ser traçada com dois pontos mas o h é muito pequeno, <u>são coisas que não podemos questionar</u>.

Aluno 3, um dos representantes da turma na "Inatingibilidade" do limite…

O Aluno 3 utiliza o conhecimento prévio da definição de derivada para "extrair" significado e não para "atribuir" significado, ou seja: (1) extrai o significado de que em limite a razão incremental é o declive da reta tangente para poder utilizar, no cálculo do limite, a expressão algébrica da derivada como uma rotina, e (2) não atribui significado porque não é capaz de explicar, baseado na definição de derivada, a razão de considerar, em limite, o declive da mesma. Quando este aluno refere "são coisas que não podemos questionar" tem como estratégia a aceitação de um novo conceito (conceito de limite) ultrapassando a dificuldade manifestada refletida na expressão "Ele [Aluno 9] tem razão…" o que revela uma compreensão instrumental do conceito de limite que se traduz na aquisição de uma regra que é, a do cálculo do limite da razão incremental.

No estudo das assintotas o Aluno 3 procurou um procedimento para efetuar o cálculo algébrico da assintota vertical. No estudo da função $f(x) = \frac{x}{x-2}$ não referiu o domínio da mesma e não compreendeu a representação gráfica onde estavam indicados os limites laterais com $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$ tendo colocado a questão:

Aluno 3: Não vale a pena olhar para o gráfico, faço o denominador igual a zero e fica $x = 2$. Professora, se em vez de ter $(x - 2)$ tiver $(x + 2)$ a assintota é $x = -2$?

Na resolução da Tarefa 2, o Aluno 3 registou "instruções" para futuras resoluções algébricas tais como "quero a derivada…" e "é o declive da reta tangente" (Figura 11).

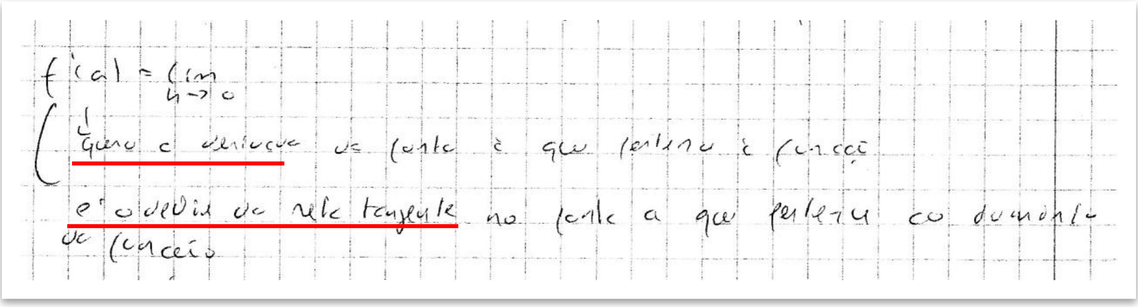


Figura 11 - Aluno 3 - Resolução da questão 1.5 da Tarefa 2

No teste de avaliação, o mesmo aluno, apesar de revelar ausência na simplificação da expressão, “esquecimento” de um sinal e falta de rigor na escrita, demonstrou um bom desempenho no manuseamento algébrico da definição de derivada (Figura 12).

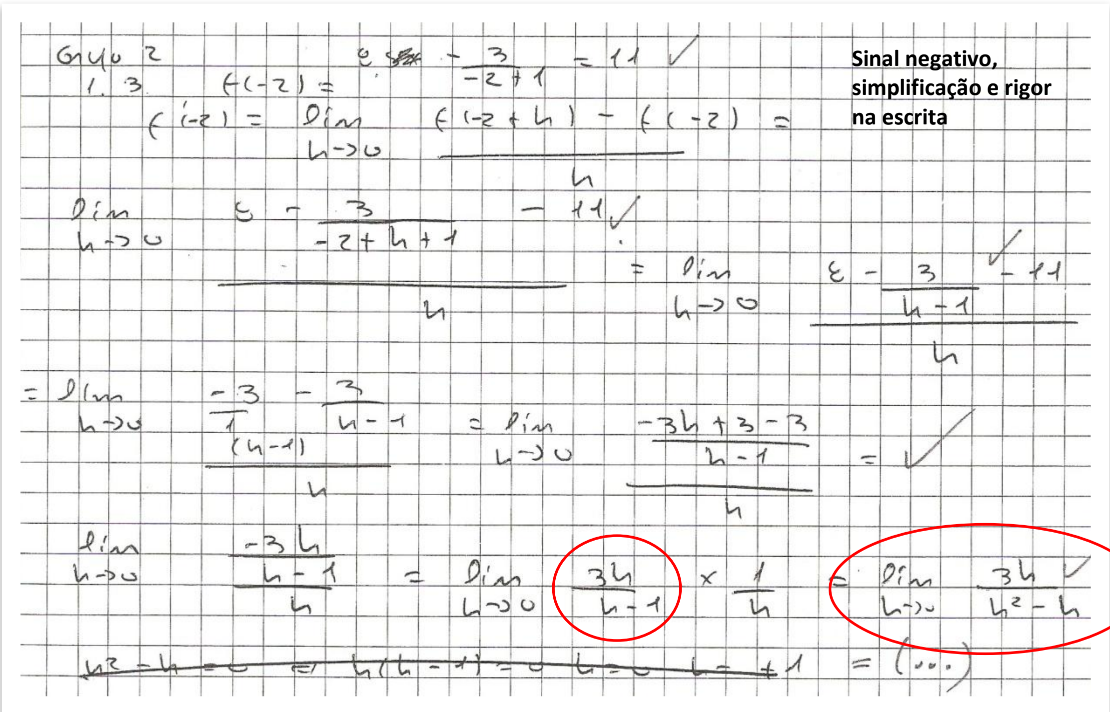


Figura 12 - Aluno 3 - Resolução no teste de avaliação, contexto da diferenciabilidade

Nestes diferentes contextos, estudo das assintotas de uma função racional e diferenciabilidade, o Aluno 3 evidencia que o “conceito imagem” de limite que tem vindo a construir tem por base a procura de procedimentos algébricos e que utiliza o conceito de limite com base numa compreensão instrumental.

O "conceito imagem" de limite não consistente que o aluno construiu representa um conflito potencial no "conceito imagem" de assintota (articulação entre dois "conceito imagem"), já que este aluno revela uma compreensão instrumental em ambos. O processo "erróneo" na construção do "conceito imagem" de assintota dar-se-á quando forem acionados, simultaneamente, por exemplo, a "inatingibilidade" do limite e a compreensão instrumental do conceito de assintota ou seja, quando se revelar o conflito cognitivo na construção do "conceito imagem" de limite. Quero com isto dizer que o processo "erróneo" é o de o aluno assumir que o $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ indica uma assintota horizontal que é $y = c$ na função $f(x)$, **já que** o $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ significa, pelo seu "conceito imagem" de limite não consistente, **que f(x) se aproxima de *c* mas nunca atinge *c***" (Conflito cognitivo da "inatingibilidade" do limite a gerar conflito cognitivo na construção do "conceito imagem" de assintota). Este processo "erróneo" afasta a hipótese do gráfico de uma função intersetar uma assintota horizontal como por exemplo $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$.

Aluno 9, um dos representantes da turma na "Inatingibilidade" do limite…

O Aluno 9, nesta etapa da construção do "conceito imagem" de limite isolou, da definição de taxa de variação, o fator de conflito cognitivo que é o do intervalo [a, a+h] "ter sempre uma amplitude" porém, este ficou encapsulado (escondido) passando a fator de conflito potencial. O facto do Aluno 9 "ignorar" este fator de conflito cognitivo fez com que o mesmo resolvesse corretamente a questão 5.4 da Tarefa 3, proposta para trabalho de casa (Figura 13). Desta forma, parte da evocação do "conceito imagem" de limite não causou uma situação de conflito, culminando num processo "bem-sucedido", mas está assente numa compreensão instrumental.

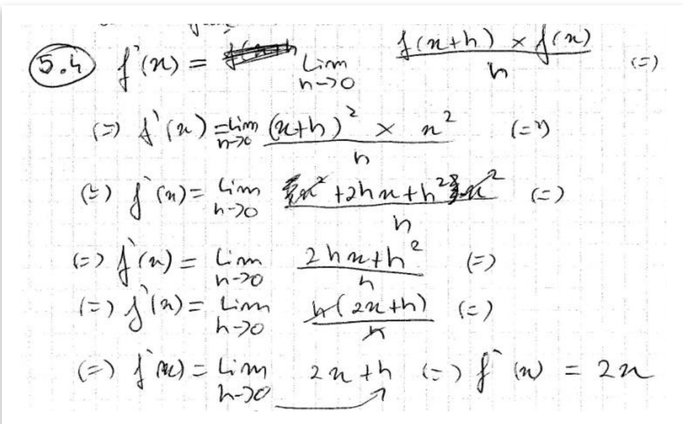
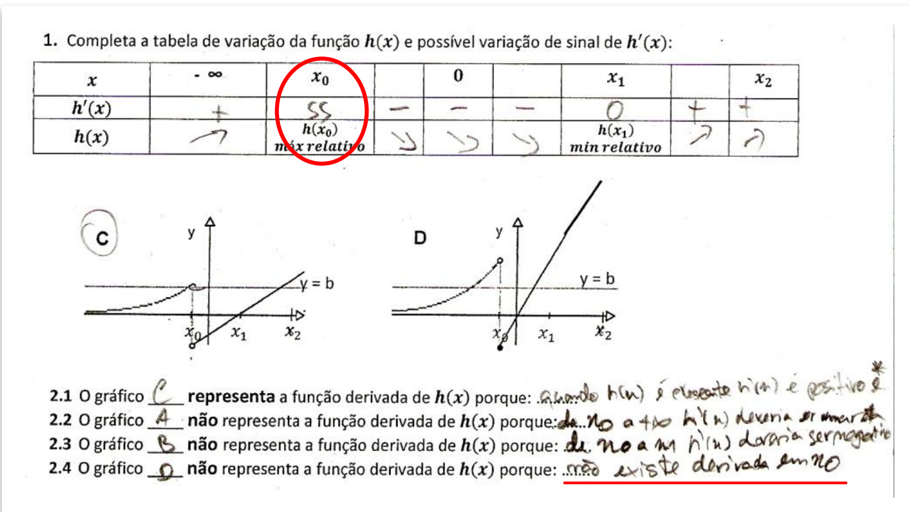


Figura 13 - Aluno 9 - Resolução da questão 5.4 da Tarefa 3

Porém, na 5.ª aula, numa discussão em turma promovida pela resolução da Parte II da Tarefa 3 acerca do "declive" de uma reta vertical, o Aluno 9 questiona se uma reta pode ter declive $\pm\infty$. Ao colocar esta questão, o "conceito imagem evocado" por este aluno parece incluir dois aspetos: (1) a definição de derivada da função num ponto, que o aluno assume, por manipulação algébrica, como um valor atingível (note-se que a discussão em turma era a de descobrir que a derivada num ponto da função podia não estar definida, ou seja, os alunos ainda não tinham tido o "contacto formal" com a inexistência da derivada num ponto), e (2) parte do "conceito imagem" de limite encerra a "inatingibilidade" do mesmo, que provém do encapsulamento do fator de conflito potencial que é o do intervalo [a, a+h] "ter sempre uma amplitude". Para este aluno, a "inatingibilidade" do limite é simbolicamente retratada por $\pm\infty$, daí provém a sua questão acerca do declive $\pm\infty$.

Após discussão em turma e reiteração de que quando calculamos o limite num ponto estamos a abordar um intervalo específico da função (clarificação necessária para tentar anular o fator de conflito potencial que é o de "atribuir sempre uma amplitude ao intervalo $[a, a+h]$" que se repercute na "inatingibilidade" $(\pm\infty)$), o Aluno 9, bem como a maior parte da turma, evidenciou ter compreendido que a derivada num ponto de uma reta vertical não está definida porque não é uma função $(m_r = \frac{y_2 - y_1}{0})$. Deste modo, mostra que reconhece uma função como um processo e não como um objeto (Juter, 2008), dado que, como por exemplo, considera o domínio da mesma $[(x_2 - x_1) \neq 0]$ e não pelo facto do seu declive "poder ser $\pm\infty$", o que se pode constatar na resolução da questão 1. e 2. da Tarefa 5 (Figura 14).


1. Completa a tabela de variação da função $h(x)$ e possível variação de sinal de $h'(x)$:

x	$-\infty$	x_0		0		x_1		x_2
$h'(x)$	+	SS	−	−	−	0	+	+
$h(x)$	↗	$h(x_0)$ máx relativo	↘	↘	↘	$h(x_1)$ min relativo	↗	↗

2.1 O gráfico C representa a função derivada de $h(x)$ porque: quando h(x) é crescente h'(x) é positivo *

2.2 O gráfico A não representa a função derivada de $h(x)$ porque: de x0 a +∞ h'(x) deveria ser [illegible]

2.3 O gráfico B não representa a função derivada de $h(x)$ porque: de x0 a x1 h'(x) deveria ser negativo

2.4 O gráfico D não representa a função derivada de $h(x)$ porque: não existe derivada em x0

Figura 14 - Aluno 9 - Resolução da questão 1 e 2 da Tarefa 5

Pela análise efetuada e pelo sentido crítico demonstrado aquando da discussão em turma, o Aluno 9 faz prevalecer o significado do conceito de limite sobre a manipulação algébrica do mesmo, podendo evidenciar no futuro a preocupação com o seu significado e não com o resultado do seu cálculo. Na mesma resolução o aluno estabelece conexão entre a representação gráfica da derivada, a representação numérica (tabela) e a representação gráfica da função (esboçada no enunciado) porque a sua justificação, "Não existe derivada em x_0", integra a correta interpretação das três representações. Este aluno situa-se, nesta fase, no 2.º "mundo" ("mundo" perceptual) porque utiliza o processo de fazer, processo "bem-sucedido" da resolução da tarefa, com o conceito de limite para pensar, compreensão relacional na construção do "conceito imagem" de limite.

Para finalizar esta análise, relacionada com a "Inatingibilidade" do limite, realço que tentar ultrapassar a dificuldade manifestada (fator de conflito cognitivo que se prende com a "inatingibilidade" do limite) implicou desalojar parte do "conceito imagem" de tangente, passando a sua reconstrução pela compreensão da definição geral da mesma. Este fator de conflito potencial, noção de tangente introduzida no 3.º ciclo que no contexto do conceito de limite gerou a "inatingibilidade" do mesmo, foi notoriamente difícil de desalojar já que, o tipo mais grave de fator de conflito potencial é aquele que entra em conflito com a definição formal que, neste caso particular, é a definição parcial de tangente. Esta situação revelou que o "conceito imagem" de limite inclui muitas parcelas de informação e, neste caso, a definição parcial de tangente foi uma delas. O facto de não existir uma consistente conexão entre ambos os "conceito imagem" originou esta dificuldade em turma.

Conflito cognitivo (dificuldade) – A "inatingibilidade" do limite e o "infinito"

Algumas dificuldades dos alunos podem estar relacionadas com a representação "etimológica" das palavras. As palavras "inatingibilidade" e "infinito" têm por sinónimos o "que não pode ser atingido, alcançado…" e "não finito, sem fim, ilimitado, inumerável…" respetivamente.

O resultado do questionário proposto aos alunos, antes que qualquer abordagem ao limite matemático, revela que a expressão "infinito" adquire entre estes, um significado relacionado com "inatingibilidade". Na questão 1 (

Figura 15) (representação escrita) aproximadamente 88% dos alunos responderam que “infinito” era algo “que não tinha fim”.

1. **Questão: O que significa para ti “infinito”?**

Respostas	Número de respostas
A – “Algo que não tem fim”	**8**
B – “Sem fim / Não posso ter”	**21**
C - Outras	4

Figura 15 – Questão 1 do questionário (Anexo IV)

Na questão 2 (

Figura 16) (representação visual) cerca de 94% dos alunos relacionam a expressão “infinito” e “infinitamente grande” com a imagem de uma galáxia que demonstra comportar uma “infinita” acumulação de estrelas, poeiras e gases.

2. **Questão: Relaciona as expressões indicadas em 1. com as imagens abaixo ilustradas?**

Respostas relacionadas com a Imagem 5.	Número de respostas	Imagem 5
A – “Infinito”	**11**	
B – “Infinitamente grande”	**17**	
C – Ambas (A e B)	**3**	
D - Outras	1	
E – Não respondeu	1	

Figura 16 - Questão 2 do questionário (Anexo IV)

Esta abordagem, apesar da elevada incerteza nos resultados que este tipo de recolha de dados pode conter, revela que a palavra “inatingibilidade” pode ser retratada pela palavra “infinito” que em Matemática, simbolicamente é $\pm\infty$.

Aluno 9, um dos representantes da turma - "inatingibilidade" do limite e o "infinito"…

Apesar das palavras terem sinónimos definidos, as mesmas podem adquirir significados distintos de aluno para aluno. Note-se por exemplo o caso do Aluno 9 que, porque adora estudar música há alguns anos, associa a palavra "infinito" a uma pauta (Figura 17). No questionamento oral, com gravação áudio, efetuado após lecionação, interroguei o Aluno 9 do porquê de ter associado a pauta de música à expressão "infinito". A sua resposta, que também foi escrita (*), transmite a relação que o mesmo estabelece entre a "intangibilidade" e o "infinito" ($\pm\infty$), para além da sua paixão pela música.

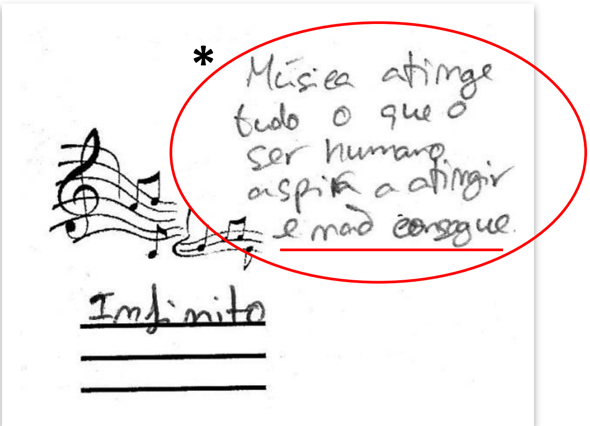
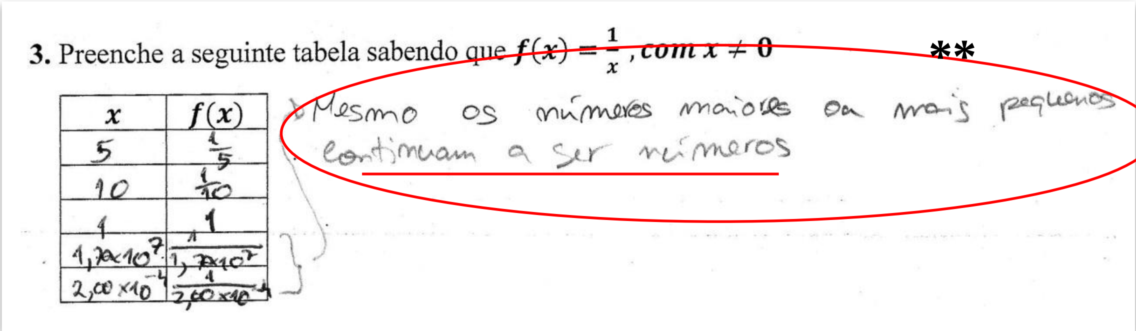


Figura 17 - Aluno 9 - Resolução da questão 2 ao questionário

No que se refere à "inatingibilidade" do limite, utilizando a representação simbólica, o Aluno 9 refere (Figura 18), no registo áudio efetuado bem como na sua resposta que também foi escrita (**), que "mesmo os números maiores ou mais pequenos continuam a ser números" porque é uma função.

Quando é pedido ao aluno, por questionamento oral, para explicar o que quer dizer com "porque é uma função" o aluno responde que "o que disse não é o limite de uma função".



3. Preenche a seguinte tabela sabendo que $f(x) = \frac{1}{x}, com\ x \neq 0$ **

x	$f(x)$
5	$\frac{1}{5}$
10	$\frac{1}{10}$
1	1
$1,7\times10^{7}$	$\frac{1}{1,7\times10^{7}}$
$2,00\times10^{-4}$	$\frac{1}{2,00\times10^{-4}}$

Mesmo os números maiores ou mais pequenos continuam a ser números

Figura 18 - Aluno 9 - Resolução da questão 3 ao questionário

Na resposta ao questionamento oral, este aluno evidencia uma compreensão relacional na construção do "conceito imagem" de limite porque implicitamente refere que, em limite, os números mais pequenos "não continuavam a ser números" ou seja, o aluno foca-se no objeto abstrato $x \to a$ prestando atenção a $f(x)\ aproxima - se\ de\ b$ o que revela a compreensão do processo dinâmico "$se\ x \to a, então\ f(x)\ aproxima - se\ de\ b$" em termos de transformação e não somente no seu resultado final. Desta forma, este aluno, evidência que se situa no 2.º mundo – "mundo" proceptual.

Aluno 3, um dos representantes da turma - "inatingibilidade do limite" / "infinito"…

O Aluno 3 tem vindo a construir o "conceito imagem" de limite com base na procura de procedimentos algébricos que resultam em processos "bem-sucedidos". Este aluno, no contexto das assintotas de uma função racional, ao procurar a generalização para justificar uma "regra" dá sinais que a "inatingibilidade" faz parte do seu "conceito imagem evocado" de limite.

Aluno 3: … Então posso dizer que sempre que tenho uma assintota a função nunca passa por cima dela, não passa por cima porque nunca vai lá chegar…
Prof.ª: …Pode "passar por cima", imaginem…

A professora, apoiada numa representação gráfica (Figura 19), clarificou a turma.

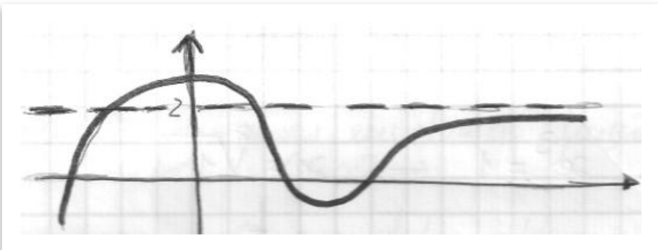


Figura 19 - Nota de campo de 29/01 - Representação gráfica efetuada pela professora

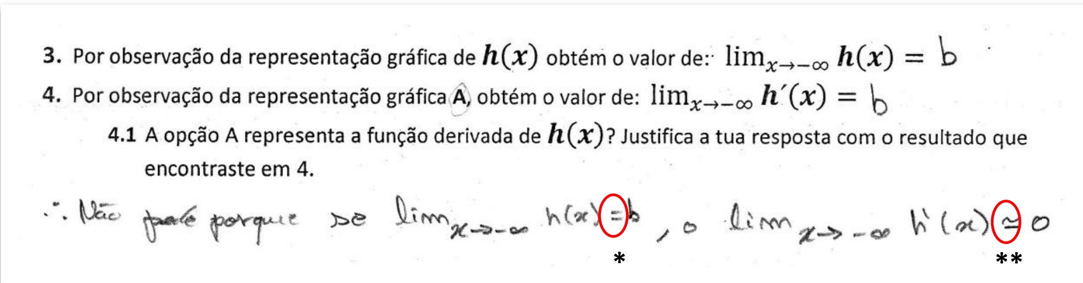
O Aluno 3, após clarificação da professora, afirmou ter ultrapassado a dificuldade manifestada. Porém, numa discussão em turma, no contexto das sucessões, referiu convictamente que como $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ tem uma assintota horizontal $(y = 2)$ a sucessão “nunca podia tomar o valor de dois”.

O Aluno 3 possui um “conceito imagem” de sucessão não consistente, pois não se refere ao termo de ordem “n” da sucessão, e também denota que o “conceito imagem” de limite está fortemente construído com base no estudo das assintotas pois o fator de conflito potencial estabelecido aquando do estudo das assintotas“…nunca vai lá chegar” traduz-se na “inatingibilidade” do limite.

Aluno 1 um dos representantes da turma - “inatingibilidade” do limite e o “infinito”…

O Aluno 1, na resolução da Tarefa 5 (**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**), apresenta uma solução que evidencia um “conceito imagem” de limite distinto em dois contextos diversos, o das assintotas de uma função racional e o da diferenciabilidade.

Este aluno evidencia um processo “bem-sucedido” no contexto das assintotas utilizando o símbolo de igualdade (*) quando calcula o limite. Porém, no contexto da diferenciabilidade, utiliza o símbolo de aproximação (**) como forma de “ultrapassar” a sua dificuldade que é a da “inatingibilidade” do limite (**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**). O processo “erróneo” poderá ser consequência do aluno, no “conceito imagem evocado” de limite, acionar em simultâneo a “inatingibilidade” do mesmo (fator de conflito cognitivo) com a sua experiência anterior que é a de “derivada da função num ponto” (valor atingível, que neste caso é zero).


3. Por observação da representação gráfica de $h(x)$ obtém o valor de: $\lim_{x\to-\infty} h(x) = b$

4. Por observação da representação gráfica A, obtém o valor de: $\lim_{x\to-\infty} h'(x) = b$

4.1 A opção A representa a função derivada de $h(x)$? Justifica a tua resposta com o resultado que encontraste em 4.

∴ Não ~~pode~~ porque se $\lim_{x\to-\infty} h(x) = b$, o $\lim_{x\to-\infty} h'(x) \simeq 0$

* **

Figura 20 - Aluno 1 - Resolução da questão 4.1 da Tarefa 5

No teste de avaliação (Figura 21), o Aluno 1 evidencia que lhe é difícil assumir a tangibilidade do limite (pela ausência constante do sinal de igualdade entre as expressões, pela “seta” que indica o resultado e pelo rasurar $h \to 0$ que, curiosamente estava entre aspas (*)) mas, quando calcula a derivada $f'(-2)$ recorre ao sinal de igualdade (**).

O Aluno 1, apesar de evidenciar ter compreendido o conceito de derivada num ponto, não revela evidência de compreender a propriedade da tangibilidade do limite. Desta forma, o seu “conceito imagem” de limite não é consistente, o que compromete a construção do “conceito imagem” de limite apesar da sua utilização ser correta.

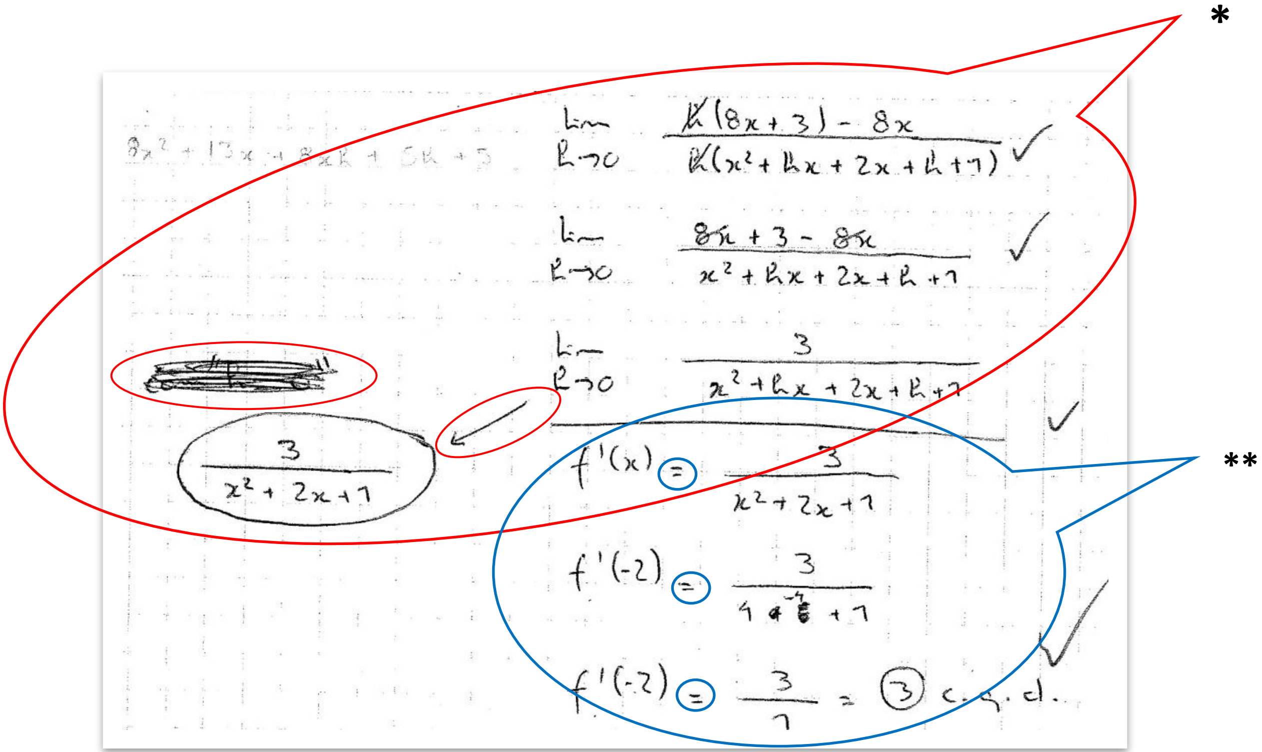


Figura 21 - Aluno 1 - Resolução da questão 4.1 do teste de avaliação

5.3 Compreensão relacional ou instrumental na construção do “conceito imagem” de limite…

A análise dos resultados apresentados pela turma, nas questões 2, 3 e 4 da Tarefa 5, evidencia que a maior parte dos alunos não atingiu uma compreensão relacional na construção do “conceito imagem” de limite, apesar desta tendência não se refletir na utilização do conceito na resolução algébrica da questão 1.3 do teste de avaliação. Dos 29 alunos que resolveram a questão 1.3 do teste de avaliação, 14 obtiveram a cotação máxima (resolução totalmente correta), 9 alunos obtiveram 82% da cotação e somente 6 alunos obtiveram um valor inferior a 50% da cotação (resoluções parcialmente corretas). Todos os alunos que evidenciaram compreensão relacional na resolução da Tarefa 5 obtiveram a cotação máxima na questão 1.3 do teste de avaliação.

Na resolução da questão 1.3 do teste de avaliação, o Aluno 23 consegue revelar algebricamente a sua compreensão instrumental do conceito de limite. Apresenta uma inconsistente construção do "conceito imagem" de limite e, paradoxalmente, também na utilização do conceito (apesar da sua resolução algébrica estar correta), pelo que o selecionei como um caso singular alvo de análise. Na resolução da questão 4.1 da Tarefa 5, o mesmo aluno, responde corretamente à questão mas a sua justificação revela compreensão instrumental.

Aluno 21, um dos representantes da compreensão instrumental no conceito de limite…

O Aluno 21, na resolução da Tarefa 5 (Figura 22), evidencia que não compreende a relação entre o gráfico da função $h(x)$ com o gráfico da sua derivada $h'(x)$ quando atribui igual valor *(b)* ao limite ($x \to -\infty$) de ambas as funções. A sua construção do "conceito imagem" de derivada e, consequentemente, a do limite da razão incremental baseia-se exclusivamente numa correta interpretação da representação gráfica de ambas as funções, justificada pelo atrás referido e pela sua resposta 2.2 (O gráfico C não representa a função derivada de h(x) porque: "a assíntota é $y = 0$, não respeita $h(x)$". O aluno revela ausência de sentido crítico matemático porque poderia, mesmo com a inexistência da compreensão destes dois conceitos, questionar porque é que a representação gráfica da função $h'(x)$, no intervalo $[x_0, +\infty]$, não é igual à da função $h(x)$ no mesmo intervalo, já que estava a considerar estas duas funções como iguais. Este aluno também evidencia que considera a função como um objeto a manipular dado que não consegue articular vários elementos, como por exemplo, domínio (não considera os intervalos), zeros e contradomínio (x_1 é zero da função $h(x)$). Este aluno situa-se no 1.º mundo ("mundo corporificado), numa fase preliminar, porque revela uma total ausência na construção do "conceito imagem" de limite e também do "conceito imagem" de derivada e de função.

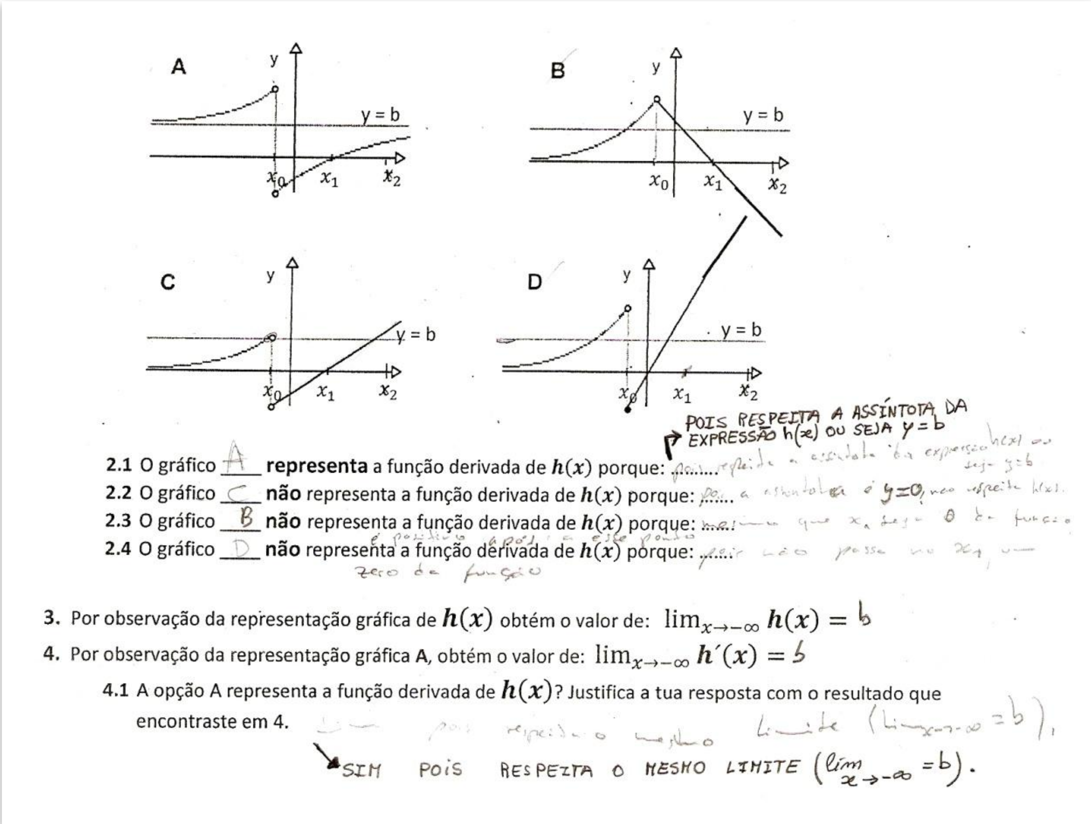


Figura 22 - Aluno 21 - Resolução das questões 2, 3 e 4 da Tarefa 5

Porém, o manuseamento algébrico do limite da razão incremental (compreensão instrumental) do Aluno 21 (Figura 23) apresenta-se correto apesar de ter ignorado, na maior parte dos passos da resolução, a simbologia $lim_{\,(h\to 0)}$, o que evidencia que para este aluno a expressão algébrica do limite de uma função é igual à expressão algébrica dessa mesma função, ou seja, $lim_{\,(h\to 0)}$ é um objeto matemático que pode ser manipulado e não um processo para pensar.

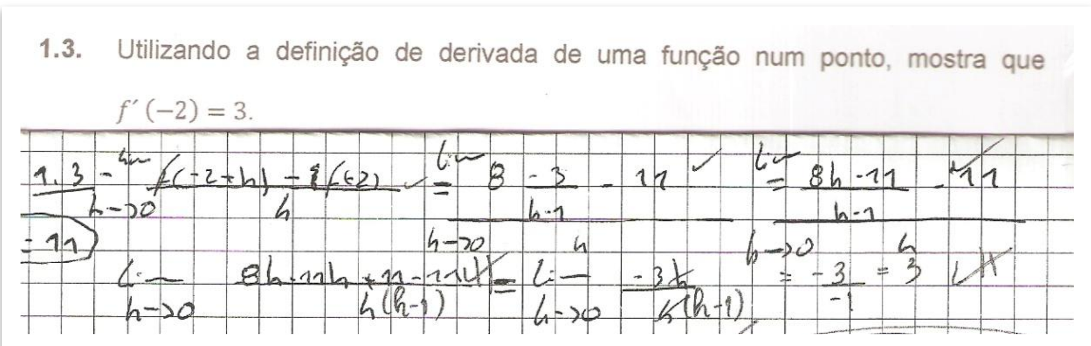
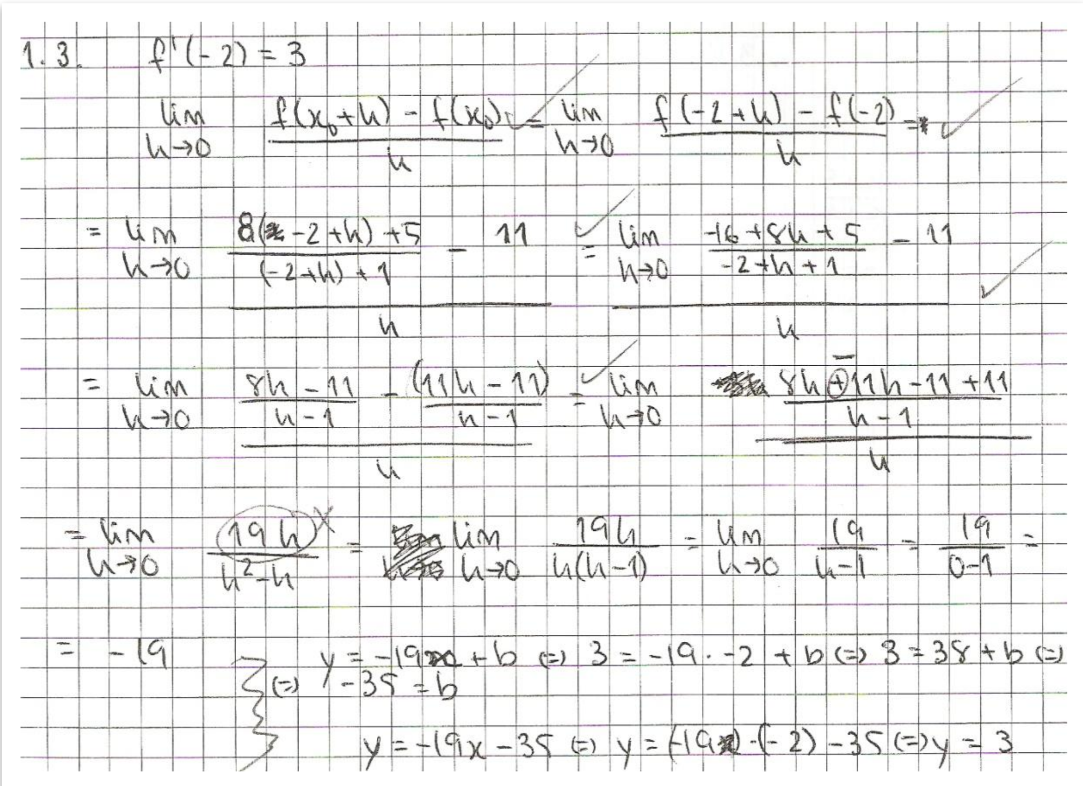


Figura 23 - Aluno 21 - Resolução da questão 1.3 do teste de avaliação

Aluno 23, um caso singular na compreensão instrumental no conceito de limite…

O Aluno 23, na resolução à questão 1.3 do teste de avaliação (Figura 24) evidencia uma procura constante da utilização do manuseamento algébrico quando persistentemente tenta encontrar a igualdade $f'(-2) = 3$. Desta forma, o aluno explicita algebricamente que o "conceito imagem" de derivada não está construído de forma consistente pois para além de outras dificuldades apresentadas iguala $y = 3$ na equação de uma reta com declive -19 o que significava que $-19 = 3$.

O aluno revela ausência de articulação entre o "conceito imagem" de derivada e o "conceito imagem" de limite porque, apesar de reconhecer que -19 é o valor do declive de uma reta, não lhe atribui o significado de reta tangente ao ponto -2 da função que, por sua vez, é o limite da razão incremental. Este aluno evidencia não compreender a expressão formal $f'(-2)$ ao não igualar -19 a 3.


1.3 $f'(-2) = 3$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{8(-2+h)+5}{(-2+h)+1} - 11}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-16+8h+5}{-2+h+1} - 11}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{8h-11}{h-1} - \frac{(11h-11)}{h-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{8h - 11h - 11 + 11}{h-1}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{19h}{h^2-h} = \lim_{h \to 0} \frac{19h}{h(h-1)} = \lim_{h \to 0} \frac{19}{h-1} = \frac{19}{0-1} =$

$= -19$ $\quad y = -19x + b \Leftrightarrow 3 = -19 \cdot -2 + b \Leftrightarrow 3 = 38 + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -35 = b$

$y = -19x - 35 \Leftrightarrow y = -19 \cdot (-2) - 35 \Leftrightarrow y = 3$

Figura 24 - Aluno 23 - Resolução da questão 1.3 do teste de avaliação

A justificação que o Aluno 23 apresenta na questão 4.1 da Tarefa 5 (Figura 25) evidencia uma compreensão instrumental através da aplicação da frase "tem de descer de grau". Para além de simbolicamente representar " $\lim_{x\to-\infty} h'(x)$" a sua justificação está omissa em relação aos intervalos da função derivada. Desta forma o aluno apresenta elementos de informação dispersos na construção do "conceito imagem" de limite.

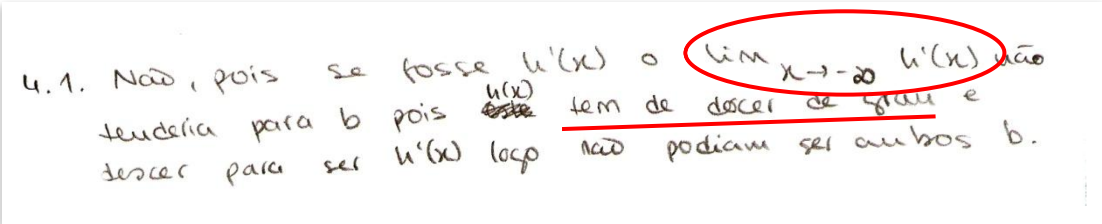
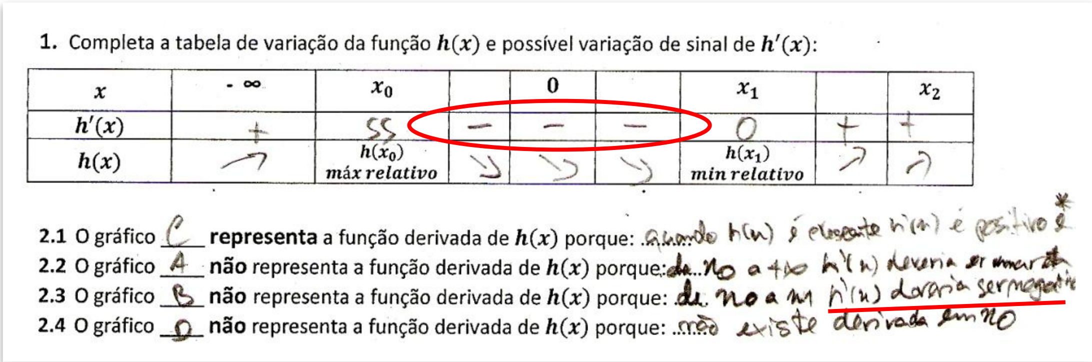

4.1. Não, pois se fosse h'(x) o lim x→-∞ h'(x) não tenderia para b pois h(x) ~~este~~ tem de descer de grau e descer para ser h'(x) logo não podiam ser ambos b.

Figura 25 - Aluno 23 - Resolução da questão 4.1 da Tarefa 5

5.4 Conflito cognitivo (dificuldade) relacionado com a articulação entre as representações gráfica, numérica e algébrica - "R3" …

Na resolução da questão 2 da Tarefa 5 aproximadamente metade da turma não estabeleceu a correta conexão entre a representação gráfica da função $h(x)$ e a representação gráfica da sua função derivada $h'(x)$ porque o "conceito imagem" de derivada não incluía o "conceito para pensar" mas somente a utilização do "processo a fazer" (procept). Quero com isto dizer que esses alunos não interpretaram o gráfico da função $h'(x)$ considerando os seus "pontos" como sendo os pares ordenados ("x é um ponto pertencente ao domínio de $h(x)$ ", "declive da reta que passa no ponto X") mas sim como pares ordenados esvaziados de significado (compreensão instrumental do que representa geometricamente a taxa de variação de $h(x)$). Esta última situação foi evidenciada pela forte conexão que os alunos estabeleceram com a representação numérica solicitada (tabela) quando referem, na sua justificação, que a função $h'(x)$ deveria ser "negativa" (ou "positiva"), e não como sendo o sinal da derivada ou seja, os vários declives das retas tangentes nos intervalos em estudo (Figura 26).



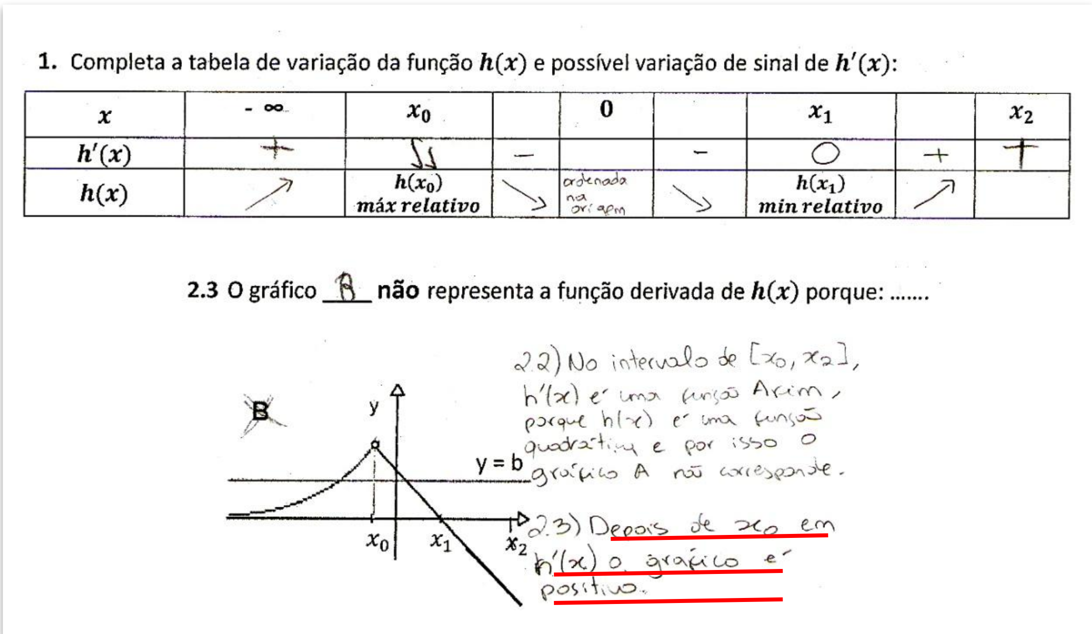
1. Completa a tabela de variação da função $h(x)$ e possível variação de sinal de $h'(x)$:

x	- ∞	x_0		0		x_1		x_2
$h'(x)$	+	SS	−	−	−	0	+	+
$h(x)$	↗	$h(x_0)$ máx relativo	↘	↘	↘	$h(x_1)$ min relativo	↗	↗

2.1 O gráfico C representa a função derivada de $h(x)$ porque: quando h(x) é crescente h'(x) é positivo e
2.2 O gráfico A não representa a função derivada de $h(x)$ porque: de no a +∞ h'(x) deveria ser [illegible]
2.3 O gráfico B não representa a função derivada de $h(x)$ porque: de no a x1 h'(x) deveria ser negativo
2.4 O gráfico D não representa a função derivada de $h(x)$ porque: não existe derivada em x0

Figura 26 - Aluno 10 - Resolução da questão 2.3 da Tarefa 5

Alguns alunos evidenciaram omitir o estudo dos intervalos (Figura 27), o que evidencia, pela ausência do estudo do domínio da função, que o seu "conceito imagem" de função tem por base a compreensão instrumental.



1. Completa a tabela de variação da função $h(x)$ e possível variação de sinal de $h'(x)$:

x	- ∞	x_0		0		x_1		x_2
$h'(x)$	+	SS	−		−	O	+	+
$h(x)$	↗	$h(x_0)$ máx relativo	↘	ordenada na origem	↘	$h(x_1)$ min relativo	↗	

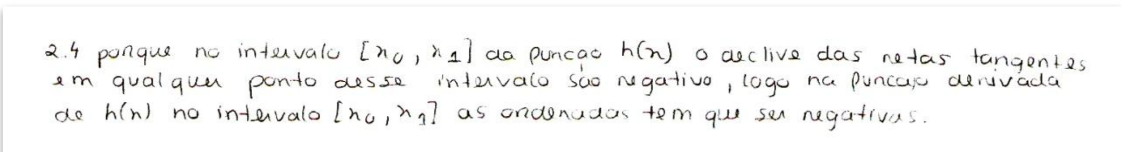
2.3 O gráfico B não representa a função derivada de $h(x)$ porque: ....

2.2) No intervalo de $[x_0, x_2]$, h'(x) é uma função Afim, porque h(x) é uma função quadrática e por isso o gráfico A não corresponde.

2.3) Depois de x_0 em h'(x) o gráfico é positivo.

Figura 27 - Aluno 22 - Resolução da questão 2.3 da Tarefa 5

Porém, os restantes alunos evidenciaram uma boa articulação entre as várias representações (Figura 28).



2.4 porque no intervalo $[x_0, x_1]$ da função h(x) o declive das retas tangentes em qualquer ponto desse intervalo são negativo, logo na função derivada de h(x) no intervalo $[x_0, x_1]$ as ordenadas tem que ser negativas.

Figura 28 - Aluno 26 - Resolução da questão 2.4 da Tarefa 5

Contudo, a resolução do Aluno 2 (Figura 29) e do Aluno 11 (Figura 30) revelam-se casos particulares, pelo que os considerei alvo de análise.

Aluno 2, um caso singular na articulação entre as representações gráfica e algébrica …

No questionamento oral, durante a gravação áudio, indaguei o aluno se este queria mesmo dizer que “a derivada de qualquer função é 0” pelo que ele respondeu que não, que se estava a referir ao comportamento da função $h'(x)$ na representação gráfica A no intervalo$]-\infty, x_0[$ bem como, o “qualquer assintota horizontal” que o aluno explicitou querer dizer diferente de zero, pelo que, em ambas as situações, a ausência de rigor na linguagem natural e matemática ficou esclarecida.

O Aluno 2, baseado na representação gráfica e representação simbólica (quando indica $h(x) = b + \frac{a}{x-c}$ e $h'(x) = \frac{-a}{(x-c)^2}$), revela uma correta articulação entre algumas frações de quatro “conceito imagem” distintos: (1) o de uma função racional, porque reconhece o ramo da função $h'(x)$ no intervalo$]-\infty, x_0[$ como uma função racional; (2) o de assíntota porque na expressão algébrica que indica tem a atenção de colocar a letra b como assíntota horizontal $y = b$; (3) o de derivada porque, para além de a calcular algebricamente, refere no questionamento oral que é $y = 0$, ou seja, declive nulo; e (4) o de limite, porque o seu “conceito definição” de limite inclui o processo dinâmico: se $x \to -\infty$ $então$ $h'(x)$ $aproxima-se$ de 0 (noção intuitiva e formal de limite ao nível do 11.º ano) quando o mesmo refere, no questionamento oral, que “não existia nenhuma assíntota diferente de zero”.

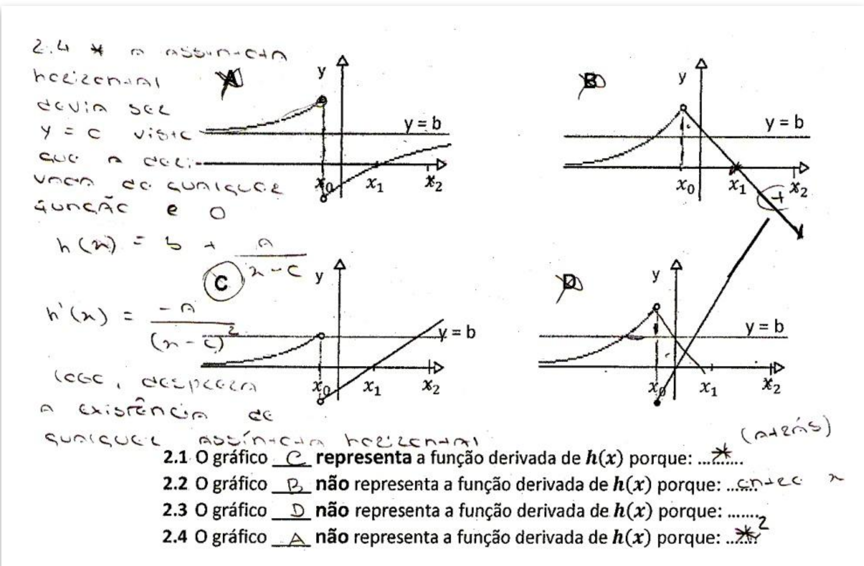


Figura 29 - Aluno 2 - Resolução da questão 2 da Tarefa 5

Aluno 11, um caso singular na articulação entre as representações gráfica e algébrica …

Este aluno, de forma sucinta e clara e procurando a generalização, evidenciou o processo “bem-sucedido” já revelado pelo Aluno 2 (Figura 30).

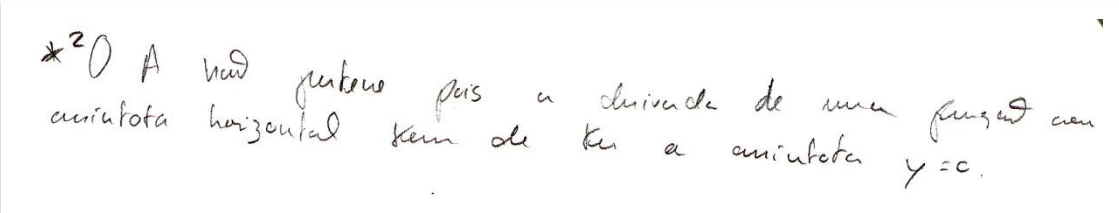


Figura 30 - Aluno 11 - Resolução da questão 2 da Tarefa 5

5.5 Conflito cognitivo (dificuldade) relacionada com a manipulação algébrica do limite…

As dificuldades mais evidenciadas pelos alunos relacionadas com a manipulação algébrica do limite estão diretamente ligadas à factorização de polinómios (Figura 31), simplificações algébricas (Figura 32) e casos notáveis (Figura 33). A errada localização da escrita dos traços de frações também é, em alguns casos, uma dificuldade evidenciada pelos alunos, induzindo-os a considerarem denominadores inexistentes (Figura 34). A ausência de rigor na escrita do símbolo $lim_{h\to 0}$ (**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**), que evidencia compreensão instrumental do limite porque a sua ausência retrata igualdade entre expressões algébricas e não a utilização do conceito de limite que lhe é inerente, também foi uma das dificuldades evidenciadas pela turma.

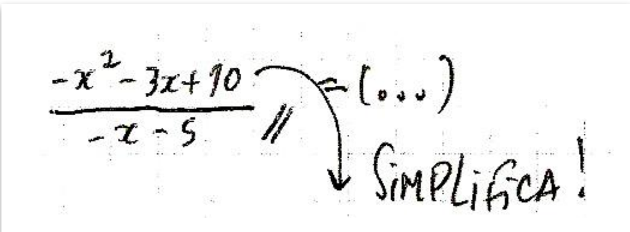


Figura 31 - Resolução da questão 2.1 do teste de avaliação: factorização de polinómios

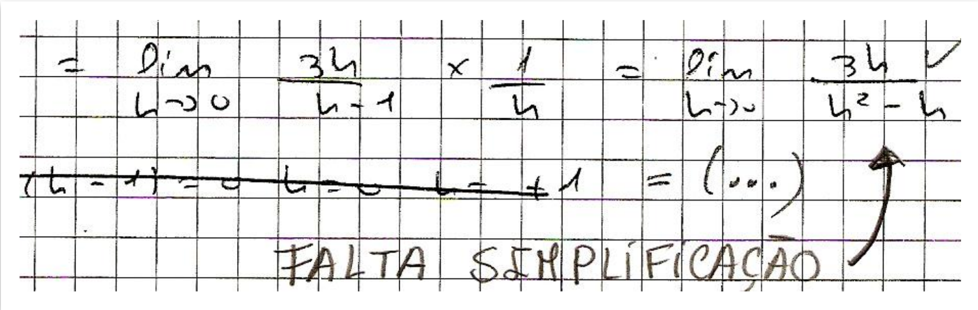


Figura 32 - Resolução da questão 1.3 do teste de avaliação: simplificação algébrica

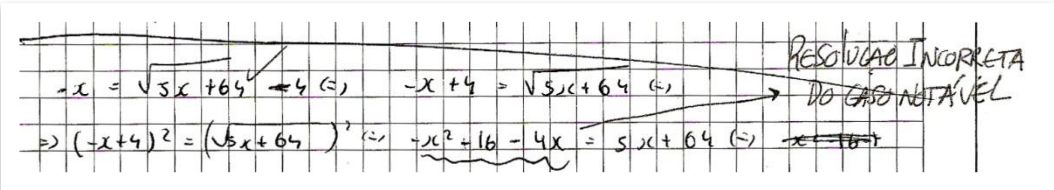


Figura 33 - Resolução da questão 3.3.1 do teste de avaliação: caso notável

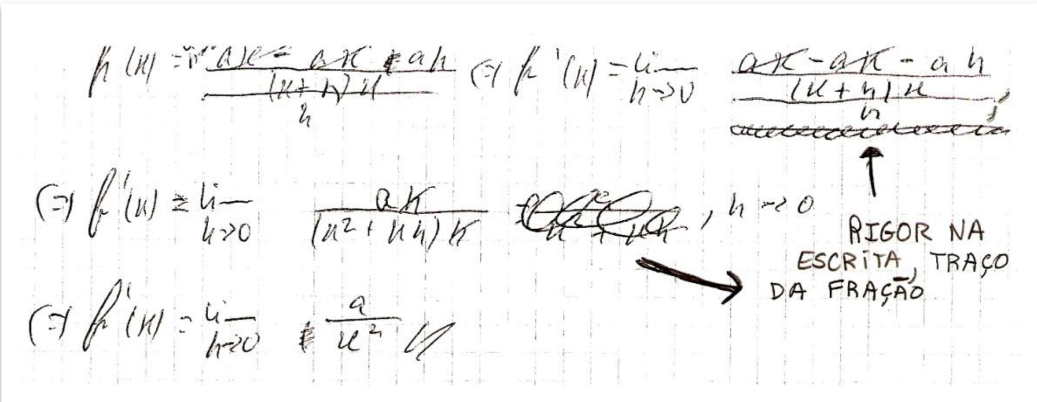


Figura 34 - Resolução da questão 6 da Tarefa 3: ausência de rigor na escrita

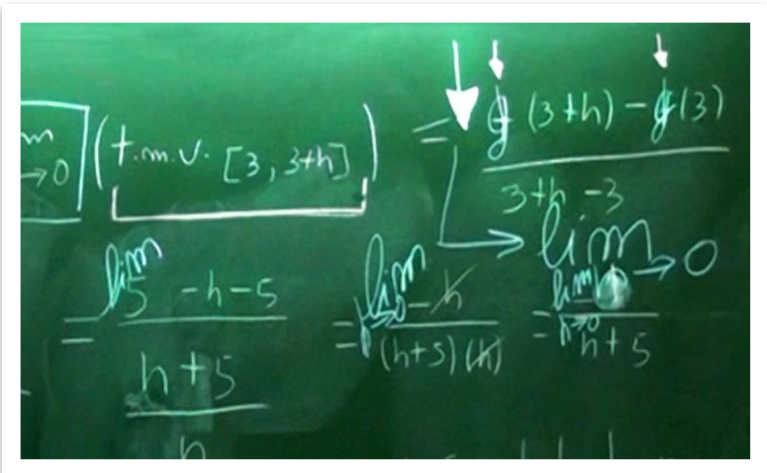


Figura 35 - Resolução do exercício 45.3 do manual: ausência de rigor na escrita

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresento as principais conclusões deste trabalho, de modo a responder às questões orientadoras que lhe deram origem.

O capítulo inicia com uma síntese do estudo, seguindo-se as suas principais conclusões, que tiveram como base os episódios analisados. Em alguns casos, o processo conclusivo inclui alusão a possíveis conflitos cognitivos que os alunos, na prossecução das suas aprendizagens, possam vir a evidenciar.

A reflexão pessoal, que esta prática propiciou, encerra este capítulo mas abre inúmeros capítulos tanto do ponto de vista profissional como no enriquecimento da experiência pessoal.

6.1 Síntese do estudo

O presente estudo foi realizado no âmbito da prática de ensino supervisionada, numa turma do 11.º ano de escolaridade da escola Secundária da Ramada, e integrou a minha observação com diferentes níveis de participação nos tópicos de funções racionais, sucessões reais e na unidade curricular "Taxa de Variação e Derivada" inserida no Tema II "Introdução ao cálculo diferencial I, funções racionais e taxa de variação e derivada" do programa de Matemática A (ME, 2001), tópico alvo da minha lecionação num total de cinco aulas de 90 minutos.

O trabalho visa compreender como os alunos desta turma construíram e utilizaram o conceito de limite, numa abordagem intuitiva, em contextos diversos (funções racionais, derivada e sucessões) e quais as dificuldades que evidenciaram. Tendo como suporte primordial a análise de dados, produzida com exemplos ilustrativos das aprendizagens e dificuldades dos alunos na construção e utilização do conceito de limite, provenientes das resoluções das tarefas propostas e das discussões efetivadas em turma, procurei responder às seguintes questões:

- Qual o "conceito imagem" de limite que os alunos constroem, ao longo da unidade de ensino, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?
- Como é que os alunos utilizam o conceito de limite na resolução de tarefas que o envolvem, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?

A elaboração deste estudo incluiu um conhecimento prévio da literatura de referência, focada na aprendizagem do conceito de limite de modo intuitivo e formal, bem como, alguns estudos empíricos, construídos a partir da prática do ensino e aprendizagem, que favorecem, entre outros, a comparação de alguns dos resultados obtidos neste trabalho. Efetuei uma revisão de documentos curriculares e de investigação que fundamentam a estratégia de ensino adotada, ou seja, a prática do ensino exploratório que, entre inúmeros aspetos, proporciona a resolução de tarefas exploratórias, problemas e a comunicação como interação social (Menezes, 2014). A maior parte das tarefas propostas foi direcionada para o desenvolvimento de intuições matemáticas, encaminhando os alunos para a generalização do conceito de derivada bem como para a noção do conceito de limite. O uso de várias representações - gráfica, numéria, algébrica e linguagem natural - foi fundamental na introdução deste conceito, proporcionando distintas formas de aprendizagem e o estabelecimento de robustas conexões entre os tópicos estudados.

6.2 Principais conclusões

A estrutura de apresentação das principais conclusões orienta-se pela procura de respostas às questões do estudo. As respostas apoiam-se nas partes do "conceito imagem" ativadas num determinado momento da aprendizagem ("conceito imagem evocado" (Tall & Vinner, 1981)) que, integram algumas das dificuldades evidenciadas pelos alunos, que lhes estão associadas. Estas dificuldades são resultantes de processos "erróneos" que traduzem uma deficiente construção do "conceito imagem" de limite e/ou deficiente utilização do conceito do mesmo. Assim, um "conceito imagem" de limite pouco consistente é o que integra fatores de conflito potencial ou cognitivos, conforme referem Tall e Vinner (1981). Nesta conclusão, algumas as dificuldades evidenciadas são também, pontualmente, alvo de comparação com estudos investigativos reportados na fundamentação teórica, bem como, componentes integrantes de possíveis conflitos cognitivos, na prossecução das aprendizagens futuras.

Qual o "conceito imagem" de limite que os alunos constroem, ao longo da unidade de ensino, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?

Parte dos alunos construiu um "conceito imagem" de limite pouco consistente porque o seu "conceito imagem evocado" (Tall & Vinner, 1981) integrava algumas dificuldades resultantes de processos "erróneos".

A análise efetuada revela que uma das principais dificuldades dos alunos surgiu com a noção de que o intervalo $[a, a + h]$ apresentava sempre uma amplitude, ou seja, que o limite de uma função nunca podia ser alcançado, o que se traduz na "Inatingibilidade" do limite. Esta dificuldade revelou-se através da definição de tangente lecionada no 3.º ciclo (que não contempla a lecionação da noção de derivada) realçando deste modo que, por vezes, a razão para a construção de um processo "erróneo" pode ter origem nos conhecimentos prévios dos alunos.

Pode-se inferir, da análise efetuada, que alguns alunos ao tentarem ultrapassar a dificuldade da "Inatingibilidade" do limite construíram o "conceito imagem" do mesmo assente no conceito de função que, na maior parte dos casos analisados, é considerada como um objeto (está sujeita a determinadas "regras") e não como um processo (Tall, 1993). Assim, a construção do "conceito imagem" de limite evidencia ter sido formada a partir de duas "regras": (1) o uso de h como variável, ou seja, a atribuição de um valor a "h", que no contexto da diferenciabilidade "é zero" ($\mathrm{h} = 0$), o que também revela a ausência na atribuição de significado ao objeto abstrato $h \to 0$, e (2) a identificação do limite como sendo a imagem do ponto do domínio da função. Por outro lado, num contexto de estudo de uma função onde o conceito de limite não estava presente, os alunos evidenciaram reconhecer a função como um processo e não como um objeto (Juter, 2008), ao realçarem que uma reta vertical não é considerada uma função porque, não há correspondência unívoca entre os dois conjuntos (domínio e contradomínio). Deste modo, pode-se concluir que o reconhecimento da função como objeto ou como processo varia conforme o contexto em estudo. Esta situação evidência as oscilações que a consistência do "conceito imagem" de função pode sofrer num curto espaço de tempo porque "os conceito imagem alteram a sua natureza no decorrer do tempo" (Tall, 1993, p. 19). Esta oscilação provoca, consequentemente, alterações no "conceito imagem" de limite, nesse mesmo período, já que o conceito de função está estritamente ligado ao "conceito imagem" de limite (Juter, 2008).

Na prossecução das aprendizagens dos alunos, a "inatingibilidade" do limite acionada em simultâneo com um valor preciso do mesmo, que no contexto geométrico da derivada se traduz pelo declive da reta tangente a um ponto do domínio da função, pode gerar dificuldade quando os alunos, mais tarde, se depararem com as desigualdades estritas da definição formal de limite ($x \in D\ e\ |x-a| < \varepsilon => |f(x)-b| < \delta$) (Juter, 2008). Posso concluir que este tipo de conflito cognitivo ("inatingibilidade" do limite), considerado como "mais grave" por Tall e Vinner (1981) (porque entra em conflito com a definição formal de limite), apela à atenção apurada do professor aquando introdução do conceito de limite.

Este estudo revela, também, que a representação "etimológica" das palavras adquire algum peso na construção inicial do "conceito imagem" de limite. Apesar do resultado do questionário, antes de qualquer abordagem ao conceito de limite, indicar que para a maior parte dos alunos a expressão "infinito" adquire um significado relacionado com "inatingibilidade", verificou-se que, após introdução do conceito de limite, esta relação apresentava significados diferentes para alunos diferentes e em momentos diferentes, o que corrobora o estudo realizado por Cornu (1991).

Obtive, ainda, evidências de que em alguns casos, a compreensão instrumental da definição formal de função induz à compreensão instrumental do conceito de limite, ou seja, que o "conceito imagem" do mesmo inclui a distorção da definição de função porque esta é vista como um objeto (onde o seu domínio não é considerado alvo de estudo) e não como um processo (Juter, 2008). Note-se a dificuldade evidenciada pelos alunos, no contexto das funções racionais, quando no estudo da assintota vertical ($x = 2$) o Aluno 3 se depara com o estudo do limite de $f(x) = \frac{x}{x-2}$ nos casos em que ($x \to 2^+$) e ($x \to 2^-$). Este aluno, ao não estudar o domínio da função $f(x) = \frac{x}{x-2}$, não compreende a relação entre a representação gráfica que estava a ser explorada em turma, que considerava os intervalos disjuntos$]-\infty, 2[$ e $]\,2, +\infty[$, e o conceito de limite envolvido neste processo. Esta situação vai ao encontro do estudo realizado por Azcarate (1991) que revelou que os alunos ao considerarem duas condições distintas, neste caso o estudo de ($x \to 2^+$) e ($x \to 2^-$), e dois domínios disjuntos, neste contexto representados por $]\,2, +\infty[$, e $]-\infty, 2[$, assumem que estão perante duas funções distintas, o que é paradoxal ao estudo do limite de uma função num ponto induzindo os alunos à construção inconsistente do conceito de limite. Deste modo, não se verifica a conexão entre os dois “conceito imagem” (de função e limite) que, segundo Juter (2008), assegura um elevado nível de conhecimento concetual.

Quando os alunos não estabelecem qualquer relação entre a representação gráfica da derivada e a representação numérica da própria função, dificilmente compreendem que, em limite, a derivada é o declive da reta tangente a um ponto x do domínio da função. Isto acontece porque não compreendem que a amplitude do intervalo $[x, x+h]$ se torna cada vez menor à medida que $h \to 0$. Assim, a construção do “conceito imagem” de limite, assente somente na representação numérica da função, encaminha os alunos a não assumirem $h \to 0$ como um objeto abstrato. Subsequentemente, $h \to 0$ não representará a “causa” da aproximação de uma qualquer função que, em limite, atinge (ou não) um determinado valor (“efeito”). Deste modo, este processo dinâmico não fará parte da construção do “conceito imagem” de limite, situando os alunos que o detêm no 1.º mundo de Junter (2008). Assim, é essencial a utilização simultânea de várias representações, não privilegiando nenhuma em relação às outras para que os alunos consigam estabelecer fortes conexões entre todas elas (Kaput, 1994), citado por Biza (2007). O ambiente de aprendizagem de um estudo realizado por Biza (2007) foi concebido de modo a que os alunos explorassem simultaneamente várias representações, beneficiando do uso de computadores e de programas dinâmicos matemáticos.

Na prossecução das aprendizagens, se este processo dinâmico não for compreendido, poderá originar um conflito cognitivo quando os alunos iniciarem o estudo do limite de uma função segundo Heine, no 12.º ano de escolaridade. Isto porque, numa situação inicial, os alunos estudam o $\lim_{n \to \infty} u_n$, onde n representa a “causa” e u_n o “efeito”, para posteriormente estudarem o $lim(f(u_n))$ (que retrata a correspondente sucessão das imagens $f(u_n)$), onde agora o u_n representa a “causa” e não o “efeito”.

Nas discussões efetivadas em turma, alguns alunos clarificaram as suas dificuldades e revelaram compreensão relacional no objeto abstrato, $h \to 0$ e $"f(x+h)\ aproxima-se\ de\ f(x)"$, o que indicia que é possível a construção gradual consistente, de modo intuitivo e formal, do “conceito imagem” de limite, conforme revela um estudo realizado por Tall e Vinner (1981). Após solicitada a definição de limite, não sendo obrigatória a definição formal do mesmo, a 49 alunos, a análise dos dados apresentou 4 respostas corretas e 14 incorretas com a definição formal e, 27 corretas e 4 incorretas com a “definição dinâmica” $"se\ x \rightarrow a, então\ f(x)\ aproxima - se\ de\ b"$.

Como é que os alunos utilizam o conceito de limite na resolução de tarefas que o envolvem, em contextos diversos? Que dificuldades evidenciam?

Os alunos que evidenciam a dificuldade da “inatingibilidade” do limite na construção do “conceito imagem” tendem a utilizar estratégias dominantes de procedimentos algébricos na resolução das tarefas que envolvem o conceito de limite, revelando, nos casos analisados, compreensão instrumental (Skemp, 1978) do mesmo.

A preferência pela utilização do conceito de limite por meio de procedimentos algébricos verificou-se, no contexto das funções racionais quando os alunos se deparam com o cálculo das assintotas horizontais. Os alunos evidenciaram ter dificuldade na compreensão da interseção da função com uma assintota horizontal porque a “inatingibilidade” do limite estava presente. No contexto da diferenciabilidade os mesmos alunos não questionaram o porquê de se depararem com valores finitos, em limite, no cálculo do declive de uma reta tangente a um ponto *x* do domínio da função. Há evidência para concluir que não transportaram, simultaneamente, o elemento conflituoso da “inatingibilidade” para a mente consciente (Tall, 1993) ou, tiveram a sensação de que “alguma coisa estava errada algures” (Tall & Vinner, 1981, p. 154). Atendendo a uma destas situações, deu-se o caso de um aluno referir que “há coisas que não podemos questionar”.

É evidente, pela análise apresentada, que a maior parte dos alunos da turma calculou corretamente o limite utilizando o seu conceito sem que o tenha compreendido (compreensão instrumental). Esta tendência vai ao encontro do estudo revelado por Cornu (1991) quando salienta que a aplicação de um procedimento correto, não significa a compreensão do conceito.

Por outro lado, alguns alunos mostraram dificuldades na mobilização de algumas aprendizagens no cálculo algébrico do limite, como por exemplo, a simplificação de expressões algébricas, desenvolvimento de casos notáveis e factorização de polinómios, o que dificulta o manuseamento algébrico do cálculo do limite. Este aspeto interfere com a utilização do conceito de limite, ao apresentarem resultados errados, não se podendo inferir, por informação insuficiente do estudo, a sua interferência com a construção do “conceito imagem” do mesmo.

No entanto, todos os alunos que apresentaram uma compreensão relacional (Skemp, 1978) do conceito fizeram uma correta utilização do mesmo o que vai ao encontro de um estudo efetuado por Robert e Boschet (1984), citado em Tall (1993) que evidencia que os alunos com mais sucesso no cálculo do limite são os que apresentação compreensão relacional (Skemp, 1978).

No momento da introdução do conceito, grande parte dos alunos relaciona o conceito de limite exclusivamente com a sua utilização por meio do cálculo algébrico. Porém, à medida que a construção do "conceito imagem" de limite se vai tornando cada vez mais consistente, esta evidência vai sendo atenuada, conforme também é evidenciado num estudo realizado por Azcarate (1991) quando, após algum tempo de aprendizagem, 16 dos 18 alunos entrevistados apresentaram um nível de conhecimento situado na compreensão relacional da definição formal de derivada com a noção do conceito de limite.

Outra conclusão do meu estudo é que alguns alunos construíram e utilizaram o conceito de limite evidenciando compreensão relacional entre as várias representações e entre vários contextos, inferindo, deste modo, que o conceito de limite pode ser introduzido de forma intuitiva e formal, tendo por base a exploração das várias representações. Kaput (1992), citado em Karatas et al. (2011), argumenta que a exploração das várias representações auxilia os alunos na formação de um "conceito imagem" consistente de qualquer conceito matemático e, a investigação na área evidencia que existe relação entre a exploração das várias representações e o desempenho dos alunos (Karatas, 2011).

A análise efetuada evidencia que apreender, num tão limitado espaço de tempo, novas e complexas ideias que requerem a construção e a utilização de um conceito matemático abstrato, neste caso, o conceito de limite, causa dificuldades aos alunos (Tall, 1993). Por comparação, o estudo revela que a representação geométrica da derivada foi compreendida pela grande parte dos alunos, dada a sua natureza no que se refere ao nível de abstração solicitado porém, a compreensão relacional da sua representação simbólica (definição formal de derivada) com a noção do conceito de limite, apresentou inúmeras dificuldades tal como observado num estudo de Azcarate (1991) que, após análise das entrevistas efetuadas a 18 alunos, numa fase inicial de aprendizagem, que é o caso do meu estudo, 16 alunos encontravam-se a um nível de conhecimento elementar, caraterizado pela noção de derivada como o cociente distância/tempo, dois alunos já estabeleciam a relação desse cociente com a noção de aproximação e nenhum deles apresentou unicamente conhecimento ao nível da noção de aproximação ou ao nível da noção do limite (último estádio).

6.3 Reflexão final

O acompanhamento desta turma, num local que deve proporcionar aprendizagem técnica, científica e humana, conduziu-me ao enriquecimento do meu "conceito imagem" de ser professor que é fundamentado por um objetivo principal: a aprendizagem significativa dos alunos.

As propriedades associadas à construção deste conceito são: "Acreditar", "Perseverança", "Empenho", "Satisfação" e "Paixão". A sua utilização, algumas das dificuldades e facilidades evidenciadas serão o conteúdo desta reflexão, que recai na experiência por que passei.

"Aluno" n.º professor, um dos representantes de Acreditar…

Esta experiencia, reforçou o meu "Acreditar" na prática do ensino exploratório onde admito, que todos os alunos são capazes de aprender. O contato de perto com o contexto escolar permitiu-me refletir sobre as caraterísticas da turma onde lecionei, ou seja, a forma como os alunos aprendiam com compreensão, o grau de motivação que apresentavam para enfrentar novos desafios, o seu nível de conhecimento matemático, entre outros.

A minha opção pela prática do ensino exploratório saiu reforçada e, após reflexão mostrou-se adequada, tendo em conta o balanço das aprendizagens dos alunos. Contudo, senti dificuldade em articular todas as dimensões que esta prática requer; esse foi o meu maior desafio. A reflexão sobre este desafio apela a outras propriedades do "conceito imagem" de professor.

"Aluno" n.º professor, um dos representantes da Perseverança…

Considero que refletir sobre como estava a decorrer o processo de aprendizagem dos alunos implicou ter a humildade de assumir os "erros" e transformá-los na adaptação de tarefas, na flexibilidade em alterar a metodologia prevista, na pesquisa de outros caminhos para a resolução das tarefas, entre outros. Gerir todo este processo exigiu perseverança e nunca desistir da aprendizagem dos alunos. Ao assumir este papel, mais facilmente (re)construirei qualquer teoria curricular técnica (Pacheco, 1996) que me possa vir a surgir…

Quando terminei a 3.ª aula lecionada pensei que esta tinha decorrido muito bem e que todas as discussões em turma tinham resultado em aprendizagens significativas. Porém, após reflexão, fiquei desanimada porque cheguei à conclusão que havia a clarificar algumas noções referentes ao conceito de limite. Afinal a aula, neste aspeto, não tinha decorrido como pensara e, por motivos de alteração ao planeamento escolar, o teste de avaliação tinha sido antecipado para a aula prevista à consolidação de conhecimentos. Reestruturei o plano para que os exercícios do manual fossem além do manuseamento algébrico, preparando distintas formas de exploração para a sua abordagem e estabeleci conexões com os conteúdos lecionados nas aulas anteriores. Não foi tarefa fácil apesar do apoio da professora orientadora ter sido essencial no seu desenvolvimento. A perseverança em alterar o que estava planeado também foi um aspeto fulcral na melhor recompensa que pude ter: na 4.ª aula constatei aprendizagens significativas.

A perseverança em compreender o raciocínio dos alunos conduziu a novas discussões em sala de aula, como por exemplo aconteceu na 3.ª aula onde um aluno revelou um certo "receio" quando referiu a palavra secante, o que me levou a considerar a sua resposta "incompleta", apesar de formalmente a considerar errada.

"Aluno" n.º professor, um dos representantes do Empenho…

A elaboração deste estudo e a intervenção realizada foi um desafio à minha determinação e empenho. Alargar conhecimentos a novos conteúdos didáticos, o que me fez experimentar, pela primeira vez, o papel de investigadora e, conhecer-me melhor como professora de Matemática, fez-me evoluir na área profissional e pessoal.

Realço, como reflexão, e entre muitos outros aspetos não menos marcantes, a importância da formação do professor ao longo da vida que, no presente trabalho, se traduz pelo estudo da teoria que o fundamenta. Deste modo, um aprofundado conhecimento não só cientifico mas também didático contribuiu para a construção consistente no meu conceito de ser professora bem como, na área pessoal, inúmeras "portas foram abertas" para que possa realizar / participar em futuras investigações saciando, em parte, a minha constante busca de novas aprendizagens. Após reflexão, a literatura de referência deste estudo comportou inúmeros desafios ao meu empenho em alargar conhecimentos. Um deles foi o de querer aprofundar o estudo da construção e utilização do conceito de limite no contexto das sucessões reais de variável real. O meu empenho em compreender a ideia de "conceito imagem" e “conceito definição” de Tall e Vinner (1981), não tanto quanto gostaria dado o tempo que disponha, proporcionou-me a vantagem da sua utilização neste trabalho. A vantagem sobressai não só na sua utilização, que induz à compreensão e análise de alguns conflitos cognitivos evidenciados, mas também na associação da sua natureza aos distintos contextos estudados, isto é, às várias conexões entre os vários “conceito imagem” de cada conceito que, segundo Juter (2008), asseguram um elevado nível de conhecimento concetual.

A experiência de previamente lecionar parte dos conteúdos da minha intervenção noutra turma de 11.º ano, com características semelhantes à turma que lecionei, conduziu-me à restruturação pontual do enunciado da parte II da Tarefa 3, ao melhor controlo na gestão do tempo de aula, a compreender algumas dificuldades evidenciadas pelos alunos e a refletir sobre a própria prática.

Procurar conexões entre os vários temas envolvidos nos programas dos vários ciclos de aprendizagem ou seja, saber o “quando e como” foi introduzida a definição de tangente, por exemplo, também se mostrou indispensável na minha prática. Esta última circunstância foi crucial no estudo efetuado.

Pretendo empenhar-me a corrigir e aperfeiçoar a comunicação em sala de aula, como interação social (Menezes, 2014), de modo a tornar as discussões em turma mais desafiadoras do raciocínio matemático, promotor da exploração e compreensão de conceitos matemáticos. Em parte das discussões, durante algumas clarificações, formulei questões à turma ou a um aluno em particular, às quais respondi no próprio momento. O desejo de conquistar a aprendizagem significativa dos alunos sobrepôs-se à própria forma de como os alunos devem aprender! Senti dificuldade em dirigir à turma questões orientadoras e promotoras de análise minuciosa aos conteúdos que estavam a ser explorados, pois uma ligeira dificuldade pode ser uma barreira enorme na compreensão do conceito de limite. Porém, pela participação ativa que os alunos demonstraram nas discussões efetuadas, sinto que estimulei os mesmos a argumentarem as suas ideias em turma e, por vezes, consegui apontar vários caminhos para superar alguma dificuldade evidenciada.

Ao assumir o compromisso de aperfeiçoar a comunicação como interação social (Menezes, 2014), estou também a fortalecer um meio de avaliação formativa, que é uma das dimensões na minha função profissional de professora que mais me inquieta, pela amplitude dos fatores envolvidos, e que reconheço ter sido tenuemente abordada na minha intervenção.

O conteúdo lecionado conduziu-me a verificar, entre outros, que um resultado certo não implica a compreensão do conceito em estudo, o que me dirige à indispensabilidade e empenho na prática do ensino exploratório. Note-se que parte das discussões em turma e a clarificação das dificuldades evidenciadas foram provenientes das tarefas propostas, diálogos estabelecidos durante as discussões e exploração das várias representações, donde se conclui que estes três aspetos, provenientes do ensino exploratório, com mesmo grau de importância e trabalhados conjuntamente, são basilares na consistente construção e utilização do conceito de limite, que os alunos vão formando.

"Aluno" n.º professor, um dos representantes da satisfação…

A semana da Matemática, onde se realizaram alguns jogos didáticos entre os vários alunos, foi-me propicia a diálogos com os mesmos sobre a história de alguns dos jogos e à sua fundamentação matemática bem como, entre outros, a conjeturar várias estratégias de resolução. Deste modo, tive oportunidade de concentrar, nesta semana, os conhecimentos adquiridos no "Circo Matemático", de que me orgulho ter sido uma das fundadoras. Estes pequenos diálogos foram portadores de grande satisfação e entusiasmo, na partilha de ideias e no acolhimento afável à minha presença que todos os alunos demonstraram. Um bom relacionamento com os alunos também interfere na predisposição para a aprendizagem.

Experimentei grande satisfação na adaptação/elaboração das tarefas que encaminhassem os alunos à descoberta de generalizações, que apelassem ao sentido crítico e à capacidade de abstração. Senti grande alegria ao constatar o progresso que a maior parte dos alunos alcançaram na resolução da última tarefa (Tarefa 5), sendo esta uma das tarefas que me deu mais entusiasmo em adaptar/criar algumas das alíneas, que apelavam à compreensão do conceito de limite e que estavam muito direcionadas para dar resposta às questões do estudo.

A satisfação de verificar que alguns alunos, ao tentarem clarificar as suas dificuldades, foram gradualmente construindo o seu "conceito imagem" de limite por meio de processos "bem-sucedidos" nivelou-se com a satisfação de poder proporcionar momentos de discussão a outros alunos com mais dificuldade em colocar as suas dúvidas publicamente.

"Aluno" n.º professor, um dos representantes da Paixão…

Em todas as aulas que assisti e lecionei, na semana da Matemática realizada na escola e nos diálogos com os alunos após conclusão das aulas procurei transmitir esta minha paixão pela Matemática. Pretendi que os alunos conhecessem a minha conceção sobre a mesma, que se estende muito para além do “kit de ferramentas” que proporciona o cálculo.

Conclusão:

Muitas mais reflexões efetuei, após cada aula lecionada, muito mais haveria a referir acerca do papel das várias representações trabalhadas, da utilização dos recursos em sala de aula, da avaliação das aprendizagens dos alunos, das aulas que lecionei além da minha intervenção que inclui duas aulas a uma turma de 10.º ano, enfim, do que foi realizado e do que faltou realizar. Porém, desta pequena reflexão já posso concluir:

Existe evidência que na função profissional de professor não existe “conceito definição” porque só nas páginas infinitas de um livro sobre a “Ética de Ser” poderia ser escrita. Os dados recolhidos indiciam que superei, entre processos “bem-sucedidos” e “erróneos”, o primeiro desafio que foi o de lecionar esta UE. Porém, estou no início de uma trajetória onde sempre procurarei contribuir para transformar: a ética de ter a função de professora no mundo dos elementos dispersos, na ética de ser professora no mundo mágico da Matemática.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., (1985). *Planificação no ensino da Matemática*. Texto de apoio à disciplina de Didática da Matemática II no ano letivo de 2012/2013.

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só). *Educação e Matemática,8*, 7-10. Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf

Biza, I., Diakoumopoulos, D., & Souyoul, A. (2007). Teaching analysis in dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 5th conference of European research in mathematics education* (pp. 1359-1368). Disponível em: http://www.math.uoa.gr/calgeo/docs/6.4.1.publication1.pdf

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). Research methods in education. New York, NY: Routledge.

Cornu, B. (1991). Limits. Em D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2013). *Novo Espaço Matemática A 12º. Ano*. Lisboa: Porto Editora

Decreto Lei nº 240/2001 de 30 de Agosto. Diário da República nº 240/2001 – I Série A. Lisboa: Ministério da Educação. Lisboa.

Domingos, A. M. D. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior*. Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal.

Duval R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61* (1), 103-131.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio.* Disponível em: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2011). *Meanings of the concept of finite limit of a function at one point: background and advances*. Disponível em: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG9/WG9_Fernandez_Plaza.pdf

Figueira, M. (2002). *Fundamentos de Análise Infinitesimal: Textos de Matemática* (Vol. 5, 4ª ed.). Lisboa: Departamento de Matemática, FCUL.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99*. Lisboa: APM.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 116-140. Disponível em: http://www.researchgate.net/profile/David_Tall/publication/238663171_Duality_Ambiguity_and_Flexibility_A_Proceptual_View_of_Simple_Arithmetic/links/546ded8a0cf2cd7379959021.pdf

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Disponível em: https://books.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=yUyBAAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=J.+Hiebert+(Ed.),+Conceptual+and+procedural+knowledge&ots=215uGxpSUb&sig=PPs6_NnAzYPdV9PMFCu82vOUpas&redir_esc=y#v=onepage&q=J.%20Hiebert%20(Ed.)%2C%20Conceptual%20and%20procedural%20knowledge&f=false

IE. Comissão Científica dos Mestrados de Ensino (2005). *Orientações para o desenvolvimento e elaboração do relatório da prática de ensino supervisionada*. Lisboa: Universidade de Lisboa. Disponível em: https://plataforma.elearning.ulisboa.pt/file.php/4703/2014.11.12_Orientacoes relatorio final.PDF

Juter, K. (2008). Students' concept development of limits. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the V congress of the European society for research in mathematics education CERME 5 (2007).* (pp. 2320-2329). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Karatas, Ilhan; Guven, Bulent; Cekmez, Erdem. (2011). A Cross-Age Study of Students' Understanding of Limit and Continuity Concepts. *Boletim de Educação Matemática*, Abril-Sin mes, 245-264.

“limite”, in *Dicionário Priberam da Língua Portuguesa*, 2008-2013, Disponível em: http://www.priberam.pt/dlpo/chave [consultado em 15-09-2015].

ME. (2001). *Programa de Matemática A*. Lisboa: DGIDC-Ministério da Educação e Ciência.

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M.H., Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas* Profissionais dos *Professores de Matemática* (pp. 135-161). Disponível em: http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/2429/1/2014_LM_out_liv.pdf

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).

National Council of Teachers of Mathematics (2012). *Guiding principles for school mathematics, principles to actions, executive summary*. Disponível em: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Focal_Points/Principles_to_Action/PtAExecutiveSummary.pdf

Fernando, N. (1996). Será de ir em grupos na aprendizagem da matemática. In Profmat96, APM (1996). Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Pacheco, J. (1996). Currículo: Teoria e Práxis. Porto: Porto Editora.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). Modelos de avaliação das aprendizagens (pp. 5-103). Lisboa: Universidade Aberta. Disponível em: http://www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/298482.PDF

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J.M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfírio, & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp.1-18). Setúbal: ESE de Setúbal.

Santos, L., & Semana, S. (2014). *Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies*. Disponível em: https://plataforma.elearning.ulisboa.pt/file.php/4466/Santos_Semana_ESM2014.pdf

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), Avaliação em Matemática: Problemas e desafios (pp. 1-18). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Disponível em: http://area.fc.ul.pt/pt/Encontros%20Nacionais/avaliacao%20e%20raciocinio%20matematico.pdf

Sarrico, C. (2008). *Análise Matemática. Leituras e Exercícios*, Lisboa: Gradiva.

Tall, D. (1993). Students's Difficulties in Calculus. In *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992, Québec, Canada*, (1993), 13–28. ISBN 2 920916 23 8.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D. (2003). *Concept image and concept definition*. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. Johnsen Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 281288). Norway: Bergen University College.

Teixeira, P. et al. (1998). *Funções: matemática – 11.ºano de escolaridade*. Lisboa: MEC.

Tyler, R. (1950). Elementos Curriculares. In *The International Encyclopedia of Education* (pp.1163-1169). Disponível em: https://plataforma.elearning.ulisboa.pt/mod/resource/view.php?id=149182.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

ANEXOS

Anexo I - Autorizações

ESCOLA SECUNDÁRIA DA RAMADA

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Lisboa, 9 de abril de 2015

Eu, Filomena Maria Antunes Carreira, encontro-me a realizar o Mestrado em Ensino da Matemática na Universidade de Lisboa. No âmbito do referido Mestrado estou a desenvolver um projeto de cariz investigativo intitulado "A aprendizagem do conceito de limite no 11.º ano de escolaridade". Este projeto tem como principal objetivo compreender como os alunos de uma turma de 11.º ano se apropriam e utilizam o conceito de limite na resolução de problemas, ao longo de uma sequência de ensino que privilegia uma abordagem intuitiva em contextos diversos (funções racionais, derivadas e sequências).

Para o desenvolvimento deste trabalho será necessário recolher dados em contexto de sala de aula na turma 11º A da Escola Secundária da Ramada, na qual irei lecionar a unidade de ensino Tema II (Taxa de Variação/Derivada). Os dados a recolher incluem a gravação áudio e vídeo de alguns momentos da aula, nomeadamente as discussões com toda a turma e de entrevistas aos alunos. Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem ao seu(sua) educando(a). Face ao exposto, solicito autorização para a referida recolha de dados.
Agradeço antecipadamente a colaboração e atenção dispensada.
Com os melhores cumprimentos,

Prof.ª Inês Campos
Prof.ª Estagiária Filomena Carreira

Agradeço assinatura e devolução do destacável

Eu, ____ encarregado(a) de educação do aluno____, nº ______da turma A do 11º Ano de escolaridade, da Escola Secundária da Ramada, tomei conhecimento dos objetivos do estudo intitulado "A aprendizagem do conceito de limite no 11.º ano de escolaridade", que envolverá a referida turma, na disciplina de Matemática e _________________(autorizo/ não autorizo) a participação/colaboração do meu educando na realização do mesmo.
Em relação às gravações áudio/vídeo das entrevistas que serão utilizadas para a concretização do estudo, salvaguardando o respetivo anonimato, __________________ (autorizo/não autorizo) a participação/colaboração do meu educando.

_______________________________, ___ de ______________________de 2015

O/A Encarregado/a de Educação

____

Anexo II – Planos de aula

PLANO – “Variação e taxa média de variação [a, b]”

Aula de 90 min (dois tempos) a realizar no dia 13/04/2015 das 08.15h/9.45h
Turma de Matemática A do 11º ano

Sumário (no início da aula)
Variação e taxa média de variação de uma função num intervalo [a, b]. Resolução da Tarefa 1 - “Variação e Taxa Média de Variação num intervalo [a, b]”.

TÓPICOS / SUBTÓPICOS

- Variação e taxa média de variação de uma função num intervalo [a, b].

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender a diferença entre a variação e a taxa média de variação de uma função num intervalo [a, b].
- Explorar a representação gráfica, numérica (tabela) e algébrica de funções.
- Calcular e interpretar geometricamente a taxa média de variação (declive da reta secante à função que passa nos pontos (a , f(a)) e (b , f(b)).
- Mobilizar o conhecimento adquirido da variação e t.m.v. de uma função num intervalo [a,b] na resolução de problemas contextualizados na vida real.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS POR QUESTÃO 1, 2, 3 E 4 DA TAREFA:

Objetivos para questão 1.1:

- Utilização da representação gráfica e numérica (tabela) para a resolução da questão.
- Iniciar o processo para chegar à generalização da expressão algébrica da t.m.v.[a,b].

Objetivos para questão 1.2:

- Compreender a diferença entre o significado de variação e t.m.v [a, b] de uma função.

Objetivos para questão 1.3:

- Compreender que a t.m.v. pode ser positiva ou negativa e relacioná-la com o comportamento da função / contextualização do problema.
- Compreender o significado da t.m.v [a,b] através da representação gráfica e algébrica de uma função com comportamento distinto em intervalos também distintos.
- Articular as três representações (gráfica, numérica (tabela) e algébrica) com a linguagem natural.

Objetivos para questão 1.4:

- Obter a expressão algébrica da t.m.v. [a, b].
- Compreender que a t.m.v [a,b] é o declive da reta secante que passa pelos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)), no momento da discussão.

Objetivos para questão 1.5:

- Justificar f(x) como função crescente, decrescente ou constante se estritamente crescente, decrescente ou constante no intervalo em estudo.
- Compreender a relação entre a t.m.v. [a,b] com a monotonia da função num intervalo, apresentando contra exemplos.

Objetivos para questão 2:

- Realçar a importância de compreender os conceitos e procedimentos envolvidos, interpretando a passagem da representação algébrica para a linguagem natural.
- Promover a fluência na utilização de várias representações.

Objetivos para questão 3.1, 3.2 e 3.3:

- Distinguir a variação e a t.m.v. de uma função num intervalo [a,b].
- Mobilizar os conceitos compreendidos na resolução de problemas contextualizados na vida real.

Objetivos para questão 4:

- Identificar, a partir da representação gráfica e dos conhecimentos adquiridos, que a t.m.v [a,b] é o declive da reta secante que passa pelos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)).
- Articular a representação algébrica e gráfica de uma função na resolução de problemas.
- Motivar intuitivamente o ponto de tangencia (a, f(a)) para a aula subsequente (introdução ao conceito de derivada).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Equação reduzida da reta / equação geral da reta.
- Declive de uma reta.
- Conceito de média.
- Monotonia de uma função.
- Interpretação de gráficos de funções.

RECURSOS

- **Do professor:** Computador com *PPT* e recurso *Desmos* para exploração gráfica da t.m.v.

[a, b]. Tarefa para distribuição aos alunos e giz de várias cores.

Avisar que o Professor necessita da sala às 8.00h.

- **Dos alunos:** Caderno diário, papel, material de escrita, calculadora (para facilitar os cálculos na questão 3 e 4) e manual didático.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

Comunicação matemática, autonomia e sentido crítico na argumentação.

METODOLOGIA

- Exploração de recurso dinâmico *Desmos* em sala de aula.
- O Professor, quando circula pela sala durante o trabalho autónomo, questiona o par (ou aluno do par) individualmente, caso ache oportuno, no momento da realização da tarefa a pares.
- O Professor questiona a turma através de questões orientadoras, focalização e inquirição.

- Trabalho autónomo a pares – resolução da tarefa exploratória “variação e t.m.v [a, b]”.
- Os alunos resolvem todas/algumas questões no quadro (previamente selecionadas e/ou escolhidas pelo Professor, no decorrer da aula) com subsequente discussão em grande grupo tendo o Professor um papel orientador, incentivando o diálogo e pensamento crítico.
- Sistematização das aprendizagens.

PAPEL DO PROFESSOR:

No início da aula:

- Alguns alunos poderão chegar atrasados por ser a primeira aula, neste caso, o Professor fará a síntese do trabalho a desenvolver assim que ache oportuno.

No momento da distribuição da tarefa:

- O Professor distribui a tarefa solicitando a ajuda de um aluno e indica que os alunos devem resolver as questões de uma forma ordenada (nº 1,2,3 e 4) pois poderá haver alunos que acabem o nº1 antes do primeiro momento de discussão em turma (Questão 1 da tarefa).
- O Professor dá indicação de que a tarefa deve ser feita a pares, numa folha por aluno e a caneta. Caso se enganem devem indicar que não é para considerar (como por exemplo, colocar entre parenteses) e voltar a fazer. Este procedimento é solicitado aos alunos tendo em vista a perceção por parte do professor, quando circular pela sala, do raciocínio dos alunos no desenvolvimento da tarefa e posterior recolha da resolução para analise e inclusão no relatório.
- O Professor dá indicação de que a correção deverá ser feita no caderno diário e a resolução será posteriormente entregue.

Nos momentos de realização autónoma da tarefa:

- Circular pela sala observando as resoluções dos alunos para poder selecionar as resoluções que podem trazer uma discussão produtiva em turma. As resoluções que possam trazer confusão à turma não devem ser selecionadas, porém o professor pode decidir escolher uma resolução que não esteja completamente correta ou completa de forma a levantar questões de raciocínio que possam ser generalizadas.

- O Professor circula pela sala observando as resoluções dos alunos para quando estiver no quadro a sistematizar e clarificar questões, saber em que ponto deve dar mais ênfase, quais as maiores dificuldades dos alunos, qual a fase do problema que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Só deve interferir, colocando questões orientadoras, se verificar que o aluno está bloqueado não prosseguindo o seu trabalho.
- O Professor, perspetivando uma futura reflexão, retira algumas notas com a identificação das maiores dificuldades dos alunos, qual a fase dos problemas que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Caso o Professor verifique que o rendimento de alguns alunos não é o previsto e que os mesmos estão "parados", deve iniciar momentos de clarificação, porém, os alunos que não apresentem dificuldade deverão prosseguir o trabalho.
- Caso o Professor verifique que o rendimento da maior parte dos alunos não é o previsto deve iniciar o/um momento de discussão.
- Em todas as questões deve solicitar particularmente ao aluno a sua ida ao quadro, confirmando assim o prévio consentimento do mesmo.

Nos momentos de discussão / clarificação das questões:

- Incentivar a reflexão e completude/melhoria das respostas com discussão em turma, aproveitando as intervenções dos alunos.
- No final de cada resolução o Professor deve incentivar a comunicação Professor / Aluno e Aluno / Aluno com questões orientadoras, de focalização e inquirição.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(0) Preparação da aula: Professor entra às 8.00h.

- O sumário, indicação de exercícios do manual e data serão escritos no topo do quadro.
- Preparação do *PPT*, recurso *Desmos* e giz.

(1) Início da aula: Entrada dos alunos (8.15m), sumário e indicação dos exercícios do manual que podem ser resolvidos pelos alunos que terminem mais cedo (exercícios das margens do manual do nº 33 ao 39 inclusive). ***(5 min)***

(2) Distribuição da tarefa - Indicação dos procedimentos a ter e objetivação do trabalho a desenvolver que é o de explorar o conceito de variação e t.m.v [a, b] de uma função.

Um aluno lê o enunciado do problema descrito em 1. ***(tempo incluído no momento seguinte)***

(3) Realização da Questão 1 – Os alunos resolvem autonomamente e a pares a questão 1.

(15 minutos)

NOTA: Se o professor verificar que a maior parte dos alunos não conseguem dar resposta à questão 1.2 promove a clarificação através de questões que conduzam à compreensão do que é pedido ou dos aspetos que devem observar para conseguir avançar na resolução. Após clarificação, o professor promove o trabalho autónomo a pares dando indicação aos alunos para continuarem a realização da tarefa. Caso a dúvida seja generalizada, o Professor solicita a ida ao quadro de um aluno para resolver a questão 1.1 e 1.2 que após resolução, explica aos colegas o seu raciocínio.

Papel orientador do Professor:

Prof: Explica aos teus colegas o teu raciocínio.

Possíveis questões orientadoras:

Prof: É importante distinguir a variação de uma função num intervalo [a, b] e a taxa média de variação de uma função em [a, b]. São conceitos diferentes a compreender.

O nível da água não vai ser constante, pode estar mais alto ou mais baixo, ou seja, o que vai acontecer ao nível da água?

Alunos: Vai alterando/variando.

Prof: Se eu quiser estudar a variação do nível da água no intervalo de tempo [3, 5] ou seja da 3ª à 5ª hora, o que tenho de fazer?

Alunos: Necessito do nível da água na 5ª e 3ª hora e depois faço a diferença ou seja, 6 – 3 = 3 m.

Prof: Qual a expressão algébrica que representa essa diferença?

Alunos: f(5)-f(3).

Prof: E se quiser saber, em média ou por hora, como varia o nível da água no tanque entre a quinta e a terceira hora? Quantas horas se passam desde a 3ª à 5ª hora? Como represento algebricamente essa razão?

Alunos: $\frac{f(5)-f(3)}{5-3}$

Prof: Podem passar <u>para o caderno</u> a resolução das questões 1.1 e 1.1.1 e continuar a resolver a tarefa na folha de resolução.

(4) Discussão / Clarificação da Questão 1: ***(20 minutos)***

O Professor solicita a dois alunos, separadamente no tempo, a resolução no quadro, a partir da questão 1.1 inclusive (ou da 1.2 caso a anterior tenha já sido resolvida).

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.1:</u>

Dificuldade em interpretar o gráfico da função. Necessitar da expressão algébrica da função f (aplicação exclusiva da representação algébrica; procedimento algébrico sem compreensão do significado).

Aluno: "Mas não sei a expressão da função, como posso responder?"

Prof: Temos a sua representação gráfica, quais os dados que necessitamos? Qual a informação que podemos extrair do gráfico da função f? Será suficiente para preencher a tabela? Que imagem tem o objeto 2? Os objetos estão representados em que eixo? E as imagens?

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.2:</u>

1 - Dificuldade em contextualizar o problema em linguagem natural.

Prof: O resultado em a) vem expresso em que unidades? (metros) E em b) (metros/hora)? O resultado é diferente… Quando calculamos a diferença, neste caso f(5)-f(3) o que acontece ao nível da água no tanque? Mantem-se o mesmo ou altera-se? O que nos diz este resultado? A função f relaciona o quê? O que diz o enunciado? Quando dividimos o resultado de a) por duas horas o que obtemos? Qual o seu significado?

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.3:</u>

1 - Dificuldade em contextualizar o problema em linguagem natural.

Prof: Colocar questões orientadoras e de focalização (mesmo que 1.2)

2 – Não compreender que a t.m.v. pode ser positiva ou negativa.

Aluno: "Deve estar errado, tenho um resultado positivo e outro negativo…"

Prof: Relaciona os teus resultados com o enunciado do problema.

Em b) o teu resultado é -1. Ou seja -1 m/h. O sinal "menos" indica que o nível da água aumentou, baixou ou manteve-se? Em que intervalo de tempo? Quantas horas estão contidas nesse intervalo?

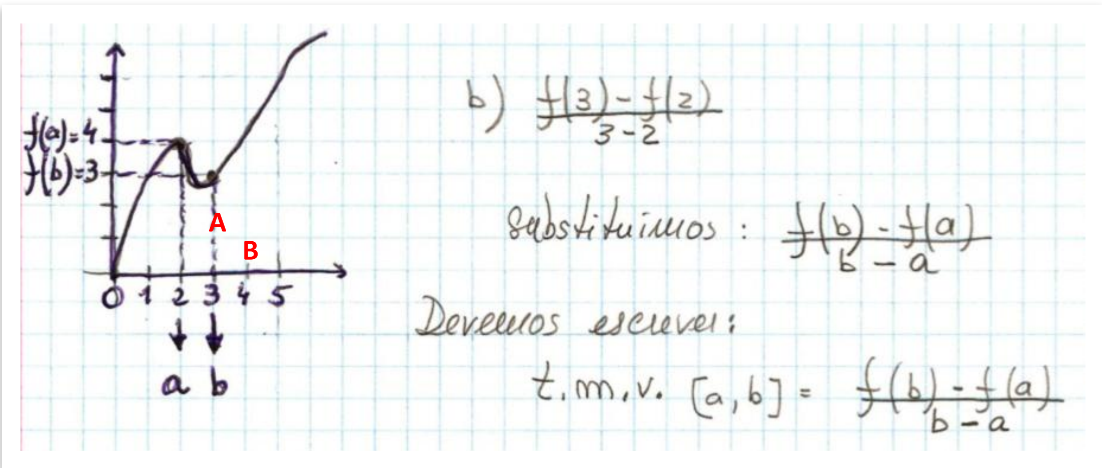
Aplica o mesmo raciocínio para o sinal positivo, que representa… (nível de água aumentou).

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.4:</u>

1 – Dificuldade em passar de um problema concreto para a generalização.

Aluno: "O que é generalizar?"

Prof: Na alínea anterior trabalhaste com dados concretos, f(3), f(1), 5 etc… Agora pretendes um qualquer objeto ou imagem ou seja em vez de 5, f(5) pode ser 4, f(4), 1, f(1)…. O que varia? Como posso designar um objeto qualquer… (x). O Professor deve orientar o aluno para chegar à expressão algébrica pedida. Caso necessário solicitará ao aluno que está no quadro, conjuntamente com a participação da turma, a "construção generalizada" da representação gráfica conforme se exemplifica:



Com o objetivo que os alunos estabeleçam relação entre a t.m.v [a,b] e o declive da reta secante que passa pelos pontos A(a, f(a)) e B(b, f(b)), o Professor deverá questionar: Esta expressão não vos recorda nada?

- O(s) aluno(s) identifica(m) o declive de uma reta:

Prof: Que reta?

Aluno(s): A que passa nos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)).

O Professor orienta os alunos para a reta secante à função, seu declive e sintetiza que a t.m.v. [a, b] é o declive da reta secante que passa pelos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)).

- Os alunos não identificam o declive de uma reta:

Prof: Tenho dois pontos, A(a, f(a)) e B(b, f(b)). Para obter um vetor diretor da reta AB como devo proceder?

Alunos: AB=B-A= (b, f(b)) - (a, f(a)) = (b-a, f(b)-f(a))

Prof: Se quisermos o declive …

Alunos: m= $\frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{b-a}}$, é a expressão que temos!

Prof: É o declive de que reta? A reta "corta" a função…. É tangente a um ponto?….

Alunos: Secante

Professor sintetiza.

Pode surgir a dificuldade do *sentido* do vetor diretor:

Alunos: $\underset{AB}{\longrightarrow}$ e $\underset{BA}{\longrightarrow}$ são vetores diretores da reta, qual escolhemos?

Prof: Solicita ao aluno no quadro para calcular $\underset{BA}{\longrightarrow}$:

$\underset{BA}{\rightarrow}$= A-B = (a,f(a)) - (b,f(b)) = (a-b, f(a)-f(b))

m = $\frac{f(a)- f(b)}{a-b}$ = $\frac{-[f(a)- f(b)]}{-[a-b]}$ = $\frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{b-a}}$ (expressões equivalentes)

O Professor deverá alertar que em qualquer problema poderá surgir no enunciado, o valor da tangente do angulo que a secante faz com o eixo das abcissas:

m = tg(α) = $\frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{b-a}}$. Caso os alunos queiram explorar este conceito, deverá ser indicada a pág 61 do manual para visualização gráfica do mesmo.

<u>Outros:</u>

1 – Sentido crítico apurado perspetivando um intervalo aberto:

Alunos: Se tivermos o intervalo [0, 3 [podemos calcular a t.m.v.?

Prof: Suponhamos que estamos a analisar o nível da água nas três primeiras horas. Se não tivermos registo do nível da água na terceira hora, isto é, não estar definido f(3), não podemos obter a t.m.v. o que nos leva desde já a questionar acerca de….. (assegurar aos alunos a noção intuitiva de que o ponto tem de pertencer ao domínio e a função deve ser continua nesse ponto).

Após compreensão, sistematizar que a variação e a t.m.v [a, b] de uma função devem ser analisadas em intervalos fechados.

Extensão à questão 1.4 - A propor pelo Professor na discussão, com o objetivo de consolidar a compreensão da t.m.v [a, b]:

Se o tanque tivesse <u>sempre</u> um nível mínimo de água de 1 metro, qual seria o resultado e significado da expressão: $\frac{\mathbf{f(3)-f(0)}}{\mathbf{3-0}} = \mathbf{?}$

O Professor deve orientar os alunos, apoiando-se nas três representações (gráfica, numérica e algébrica), a responderem $\frac{\mathbf{f(3)-f(0)}}{\mathbf{3-0}} = \frac{\mathbf{3-1}}{\mathbf{3-0}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$; nas três primeiras horas o nível da água do tanque aumentou à razão de 2/3.

Prof: Este facto alteraria as vossas respostas às alíneas b) e c)? Porquê?

O Professor deve orientar os alunos para o facto de f(0) = 1 e que nada se alteraria porque o instante x=0 não era considerado nas alíneas b) e c).

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.5:</u>

1 – Atribuir o sinal da t.m.v [a,b] à monotonia da função no intervalo [a, b].

Aluno: "A t.m.v [a,b] é positiva, então a função é crescente!"

Prof: Quando é que uma função é crescente?

Prof: Repara o que se passa no intervalo [0,3]. A função está sempre a crescer? O intervalo [2,3] está contido no intervalo [0,3] o que podemos dizer acerca da função nesse intervalo? f(x) é crescente em [2,3]?

Prof (para o aluno que está a resolver): Questão 1.2.1 - Podes explicar o teu raciocínio aos colegas? Porque afirmas que a função não é crescente em [1, 5]? A t.m.v [1, 5] é positiva...

Após discussão, o Professor deve sintetizar: Dizemos que uma função é crescente num intervalo [a,b] se esta for estritamente crescente nesse intervalo.

Definir função estritamente crescente, decrescente e constante.

Aproveitar para realçar que o facto da t.m.v [1,3] ser zero significa que a secante que passa pelos pontos (1, f(1)) e (3, f(3)) tem declive zero (reta horizontal ao semi eixo dos XX) e não que a função é nula nesses pontos.

2 – Interpretação errada do enunciado

Os alunos podem não dar atenção que o que é pedido é uma justificação de que as afirmações são falsas e atribuir intervalos que justifiquem (escolhendo sem compreender o significado de função crescente, decrescente ou constante) a "veracidade" das afirmações colocadas.

Ex: escolha dos intervalos [0, 1], [3, 5]… para 1.2.1.

Possíveis estratégias de resolução:

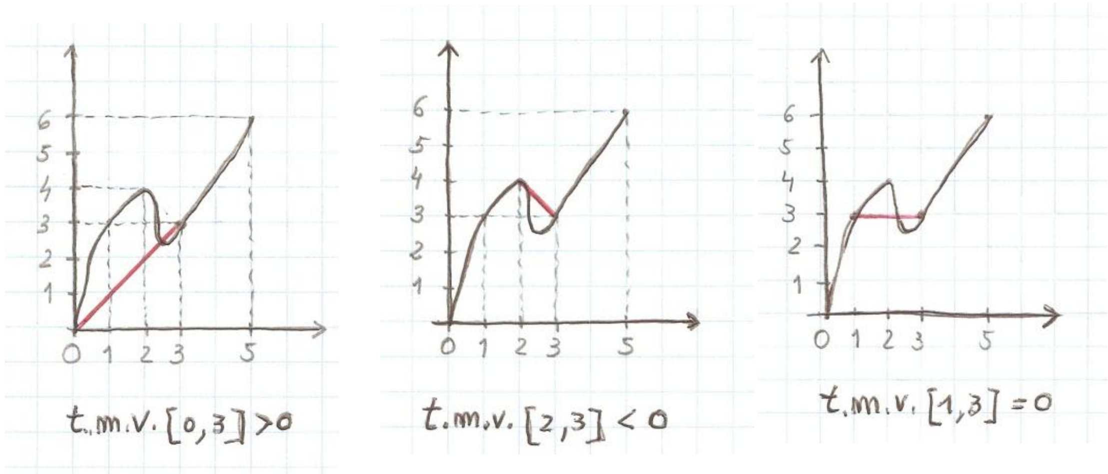
- Questão 1.5 a) – Como resposta certa, poderá considerar os intervalos [2, 5], ou [1, 5] ou [0, 5] ou [0,3].

- Os alunos poderão considerar intervalos, <u>a avaliar no momento da discussão</u>, marcando por exemplo o ponto (a, f(a)) no interior dos intervalos [0, 1], [3, 5] etc…

(5) Síntese das aprendizagens: ***(10 minutos)***

O Professor chama a atenção para:

- t.m.v.>0, <0 ou =0 (relacionando com o declive da secante), podendo servir-se da representação gráfica:



- A diferença entre variação e t.m.v. [a, b] passando as definições em *PPT*.

O Professor dá tempo aos alunos para passarem para o caderno o que está escrito no quadro e *PPT* e pergunta aos alunos se existem algumas dúvidas.

O Professor inicia a exploração (apoiado no recurso *Desmos*) e promovendo a discussão em turma, da relação da taxa média de variação da função num intervalo [a,b] com a monotonia da função no mesmo intervalo.

Ex: Estudar o intervalo [-4, 0], a t.m.v. é positiva e a função não é crescente nem decrescente nesse intervalo.

O Professor promove a discussão em turma:

- Qual a relação entre a t.m.v. de uma função num dado intervalo e o declive da reta secante que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos desse intervalo.
- E se diminuíssemos a amplitude do intervalo? O que acontecia? (perspetivando a abordagem à tangente).
- A secante tem declive positivo, será que podemos concluir que a função é crescente neste intervalo? Porquê? …
O Professor solicita aos alunos (separadamente no tempo) que releiam em voz alta a questão 1.5.
A exploração deste recurso permitirá justificar a questão 1.5 da tarefa com contra exemplos estudando os intervalos [0.5, 2.5], [1, 4] e [-4, 0.5] para as alíneas a), b) e c) respetivamente.

(6) Realização da questão 2, 3 e 4 – Os alunos resolvem autonomamente e a pares as questões 2, 3 e 4. ***(15 minutos)***

(7) Discussão / Clarificação de questões – Questão 2, 3 e 4: O Professor, durante o momento da resolução autónoma, seleciona as resoluções que possam trazer aprendizagem significativa à maior parte dos alunos e solicita ao respetivo aluno a sua ida ao quadro: ***(20 minutos)***

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 2.1:</u>
1- Não interpretar corretamente o enunciado.
Aluno: Quando foi plantada não tinha altura, era uma semente.
Prof: Lê novamente o enunciado. O que define t?
Aluno: os anos após o momento em que foi plantada.
Prof: Então, quando foi plantada t é igual a…
Aluno: zero
Prof: t=0 diz-nos o momento em que a árvore foi plantada, não que a sua altura era nula…
Como é definida f(t)? O que quero saber é f de….
Espera-se que o aluno resolva f(0) e verifique o resultado 9/5=1,8 m de altura.

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 2.2:</u>
1- Dificuldade em exprimir (escrevendo) os conceitos envolvidos.

Aluno: "Eu sei o que é mas não consigo escrever".

Prof: Com a ajuda do enunciado define t (nº de anos após o momento em que a arvore foi plantada), f(t) (altura da arvore em metros no momento t) então f(2,5) significa…(a altura da arvore após 2,5 anos), f(0) (altura da arvore quando foi plantada). Queremos saber o seu crescimento e o seu crescimento médio ou seja (t.m.v.)…

O professor deverá encaminhar o aluno para expressar o seu raciocínio baseando-se na compreensão/interiorização prévia dos procedimentos de obtenção das expressões algébricas da variação e t.m.v. [a,b].

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 2.2.:</u>

1 – Considerar f(0) igual a zero:

Prof: O que nos diz f(0)?

Aluno: Altura da árvore quando foi plantada.

Prof: Com f(0)=0, estás a dizer que….

Aluno: Quando a árvore foi plantada não tinha altura.

Prof: Como está definida a função f?... Espera-se que o aluno observe que f(0) = 9/5.

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 3.1:</u>

1 - Não interpretar corretamente o enunciado e ter dificuldade em exprimir (escrevendo) os conceitos envolvidos.

O Professor coloca questões orientadoras servindo-se do contexto do enunciado (atitude semelhante à reportada na questão 4).

2 - Não distinguir a variação e a t.m.v [0,3]

Aluno: Calculei $\frac{C(3)-C(0)}{3-0} = 1{,}55$ não deu 4,65 ha/dia…

Prof: O que te é pedido? A variação ou a t.m.v.? Qual a sua diferença?

Aluno: Não sei explicar.

Prof (promovendo a autonomia do aluno): Lê os teus apontamentos, verifica a resolução do teu colega. Vais compreender o que te está a ser pedido!

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 3.2 a):</u>

1 – Não considerar o 0 no intervalo [0, 3]

Aluno no quadro escreve: t.m.v $= \frac{C(3)}{3}$

Prof: Essa é a expressão da t.m.v que queremos calcular? Como chegaste a essa expressão?

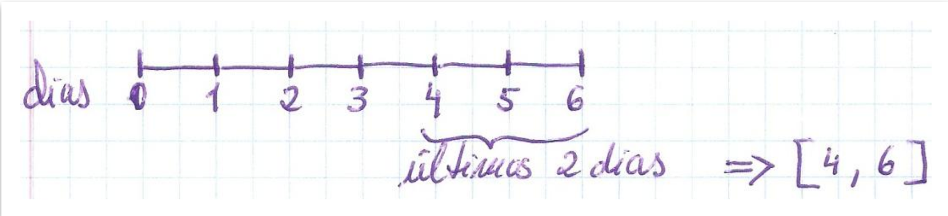
O Professor promove o rigor da escrita (t.m.v.[0, 3]=$\frac{C(3)-C(0)}{3-0}$) e deve salientar que neste caso C(0) = 0 mas se esta área apresentasse sempre contaminação o C(0) não era nulo. Bastava que a função C estivesse definida como C(t) = $-0{,}05t^3 + 2t + 1$

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 3.2 b):</u>

1- Não considerar o intervalo $0 \leq t \leq 6$ (domínio)

Aluno: Calcula $\frac{C(2)-C(0)}{2-0}$ considerando erroneamente os limites do intervalo pedido.

Prof: Com base na esquematização representada, motivar o aluno a resolver $\frac{C(6)-C(4)}{6-4}$.



<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 3.3:</u>

1 – Não compreender o contexto da questão:

Prof: O que concluíram em 3.2.1 e 3.2.2? Esquematizando o Professor, com questões de focalização e orientação encaminha os alunos para uma possível conjetura.

A contaminação da área está a aumentar ou a diminuir? (Ver resolução).

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 4:</u>

1 - Aluno: Se não tenho f(a), f(b), “a” e “b” como posso escrever a equação da reta? Sei que passa no ponto (0,1) mas falta-me outro ponto…

Prof: Como definimos a t.m.v [a,b]? O que nos indica a expressão algébrica da t.m.v.? (espera-se que os alunos mencionem o declive da reta secante). Desenvolver a questão motivando o conhecimento previamente adquirido (equação reduzida da reta, declive e equação da reta que passa por dois pontos).

2 – O aluno não se lembra da equação reduzida da reta.

Aplica outra estratégia de resolução: (Vêr resolução da tarefa).

Motivação para ponto de tangência:

Prof: Reparem numa situação, relacionem a reta r e o ponto (a, f(a)). O que podemos observar?

O Professor orienta os alunos para o ponto de tangencia dizendo que em breve vamos explorar este tema.

(8) Sistematização das aprendizagens: ***(5 minutos)***

O que devemos saber?

- Para calcular a variação de uma função num determinado intervalo [a,b] utilizamos a expressão: $f(b) - f(a)$
- Para calcular a taxa média de variação de uma função num determinado intervalo [a,b] utilizamos a expressão: $t.m.v.[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- A taxa média de variação de uma função num determinado intervalo [a, b] é o declive da reta secante à função definida pelos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)).

Realçar que estamos a trabalhar num intervalo [a,b] da função e que na próxima aula iremos compreender/interiorizar o conceito de derivada <u>num ponto x pertencente ao domínio da função</u> e para isso vamos recorrer ao conceito de limite já estudado nas assíntotas.

APRENDIZAGEM COMPLEMENTAR

- Exercícios das margens do manual do nº 33 ao 39 inclusive.

PROSSECUÇÃO DAS APRENDIZAGENS

- Taxa de variação também designada por derivada (declive da tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$.

AVALIAÇÃO

- A ser decidido pela Professora Cooperante.

TAREFA

Tarefa adaptada de:

Costa, B., & Rodrigues, E. (2013). Novo Espaço Matemática A 11º. Ano. *Caderno Prático* (pp. 28-29). Lisboa: Porto Editora

PLANO - “A bola no plano inclinado”

Aula de 90 min (dois tempos) a realizar no dia 16/04/2015 das 08.15h/9.45h
Turma de Matemática A do 11º ano

Sumário (no início da aula)
Revisão dos conceitos de variação e taxa média de variação de uma função num intervalo [a, b]. Resolução da Tarefa 2 - “A bola no plano inclinado ”. Noção de Taxa de Variação (declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$.

TÓPICOS / SUBTÓPICOS

- Taxa de variação de uma função real de variável real num ponto, também designada por derivada (declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender a diferença entre a taxa média de variação de uma função num intervalo [a, b] e a sua derivada (declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$.
- Explorar a representação gráfica, numérica (tabela) e algébrica de funções.
- Calcular e interpretar geometricamente a derivada (declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$.
- Explorar o conceito físico de derivada como sendo a taxa de variação instantânea.
- Descobrir a relação entre conceitos.
- Mobilizar os conceitos compreendidos na resolução de problemas contextualizados na vida real.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS POR QUESTÃO DA TAREFA:

Objetivos para questão 1.1:

- Explorar graficamente o conceito de função.
- Promover a fluência na utilização de várias representações conforme fundamentação teórica.
- Reconhecer o comportamento de uma função quadrática.

Objetivos para questão 1.2:

- Consolidar a compreensão do conceito de t.m.v.[a, b]
- Explorar o conceito físico de t.m.v. [a, b] como sendo a velocidade média [a, b].

Objetivos para questão 1.3:

- Consolidar a interpretação geométrica da t.m.v [a,b] (declive da reta secante que passa pelos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)).

Objetivo para questão 1.4:

- Intuir o número real limite da razão incremental (representação algébrica), $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, <u>a apresentar no momento de discussão</u>.

Objetivos para questão 1.4.1:

- Promover a fluência na utilização de várias representações conforme fundamentação teórica.

Objetivos para questão 1.4.2 i) e ii):

- Relacionar a velocidade média em cada intervalo com o declive da reta secante que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalo.
- Compreender que as retas secantes tendem para a tangente ao gráfico no ponto de abcissa 2.
- Intuir o ponto de tangência (t, d(t)) (introdução ao conceito de derivada).
- Compreender que o "limite pode ser alcançado" (dificuldade reportada na fundamentação teórica).
- Utilizar as ferramentas linguísticas e/ou conceituais como " h tende para", "d(t) aproxima-se de", "passagem ao limite" entre outras, conforme refere Tall e Vinner (1981) citado por Férnandez-Plaza, Rico e Ruiz-Hidalgo (2011), de forma a estabelecer a ponte entre a compreensão presente do aluno e a intencionada.

- Estabelecer um raciocínio de natureza dinâmica inverso (decréscimo da velocidade média em i) 3º.ponto) para consolidar o "conceito imagem" da velocidade média (t.m.v.) que, caso não esteja relacionado coerentemente com a definição do conceito, pode resultar num conflito potencial, na futura aprendizagem do conceito de limite, segundo Tall e Vinner (1981).

Objetivos para questão 1.5:

- Relacionar o declive da reta secante que passa pelos pontos (2, 12) e (2+h, d(2+h)) com o declive da reta tangente ao ponto (2, 12) quando $h \to 0$.
- Relacionar o conceito de limite (introduzido nas assintotas) com as retas secantes a aproximarem-se reta tangente ao ponto (2,12).
- Apurar sentido crítico na observação da precisão arbitrária de aproximação ao limite.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Equação reduzida da reta / equação geral da reta.
- Declive de uma reta.
- Reta tangente a um ponto.
- Conceito de limite (intuitivo e formal).
- Conceito de t.m.v [a, b].
- Interpretação geométrica da t.m.v [a, b].
- Interpretação de gráficos de funções.

RECURSOS

- **Do professor:** Computador com *PPT* e recurso *Desmos* para exploração gráfica da t.m.v.

[a, b]. Tarefa para distribuição aos alunos e giz de várias cores.

<u>Avisar que o Professor necessita da sala às 8.00h.</u>

- **Dos alunos:** Caderno diário, papel, material de escrita, régua, calculadora (para facilitar os cálculos na questão 1.4) e manual didático.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

Comunicação matemática, autonomia, sentido crítico na argumentação e raciocínio matemático.

METODOLOGIA

- Exploração de recurso dinâmico *Desmos* em sala de aula.
- O Professor, quando circula pela sala durante o trabalho autónomo, questiona o par (ou aluno do par) individualmente, caso ache oportuno, no momento da realização da tarefa a pares.
- O Professor questiona a turma através de questões orientadoras, focalização e inquirição.
- Trabalho autónomo a pares – resolução de uma tarefa exploratória e exercícios do manual.
- Os alunos resolvem todas/algumas questões no quadro (previamente selecionadas e/ou escolhidas pelo Professor, no decorrer da aula) com subsequente discussão em grande grupo tendo o Professor um papel orientador, incentivando o diálogo e pensamento crítico.
- Sistematização das aprendizagens.

PAPEL DO PROFESSOR:

No momento da distribuição da tarefa:

- O Professor indica que os alunos devem resolver as questões de forma ordenada (nº 1.1, 1.2 …) dado o processo de raciocínio que lhe é inerente.
- O Professor dá indicação de que a tarefa deve ser feita a pares, numa folha por aluno e a caneta. Caso se enganem devem indicar que não é para considerar (como por exemplo, colocar entre parenteses) e voltar a fazer. Este procedimento é solicitado aos alunos tendo em vista a perceção por parte do professor, quando circular pela sala, do raciocínio dos alunos no desenvolvimento da tarefa e posterior recolha da resolução para analise e inclusão no relatório.
- O Professor dá indicação de que a correção deverá ser feita no caderno diário e a resolução será posteriormente entregue.

Nos momentos de realização autónoma da tarefa:

- Circular pela sala observando as resoluções dos alunos para poder selecionar as resoluções que podem trazer uma discussão produtiva em turma. As resoluções que possam trazer confusão à turma não devem ser selecionadas, porém o professor pode decidir escolher uma resolução que não esteja completamente correta ou completa de forma a levantar questões de raciocínio que possam ser generalizadas.
- O Professor circula pela sala observando as resoluções dos alunos para quando estiver no quadro a sistematizar e clarificar questões, saber em que ponto deve dar mais ênfase, quais as maiores dificuldades dos alunos, qual a fase do problema que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Só deve interferir, colocando questões orientadoras, se verificar que o aluno está bloqueado não prosseguindo o seu trabalho.
- O Professor, perspetivando uma futura reflexão, retira algumas notas com a identificação das maiores dificuldades dos alunos, qual a fase dos problemas que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Caso o Professor verifique que o rendimento de alguns alunos não é o previsto e que os mesmos estão "parados", deve iniciar momentos de clarificação, porém, os alunos que não apresentem dificuldade deverão prosseguir o trabalho.
- Caso o Professor verifique que o rendimento da maior parte dos alunos não é o previsto deve iniciar o/um momento de discussão.
- Em todas as questões deve solicitar particularmente ao aluno a sua ida ao quadro, confirmando assim o prévio consentimento do mesmo.

Nos momentos de discussão / clarificação das questões:

- Incentivar a reflexão e completude/melhoria das respostas com discussão em turma, aproveitando as intervenções dos alunos.
- No final de cada resolução o Professor deve incentivar a comunicação Professor / Aluno e Aluno / Aluno com questões orientadoras, de focalização e inquirição.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(0) Preparação da aula: Professor entra às 8.00h.

- O sumário, indicação de exercícios do manual para os alunos que acabem mais cedo (n.º40 ao 44, pp. 63-66) e data serão escritos no topo do quadro.
- Preparação do *PPT*, recurso *Desmos*.

(1) Início da aula: Entrada dos alunos (8.15m), sumário e indicação dos exercícios do manual que podem ser resolvidos pelos alunos que terminem mais cedo (Tarefa 13- "Enchimento do depósito" e exercícios das margens do manual do nº 40 ao 46 inclusive, pp.63-69). ***(5 min)***

(2) Síntese da aula anterior – Revisão do conceito de t.m.v [a, b], Projeção *PPT*. ***(5 min)***

(3) Distribuição da tarefa - Indicação dos procedimentos a ter e objetivação do trabalho a desenvolver que é o de explorar o conceito de derivada.
Um aluno lê o enunciado do problema descrito em 1. ***(tempo incluído no momento anterior)***

(4) Realização da questão 1 – Os alunos resolvem autonomamente e a pares.
(15 minutos)
NOTA: Se o professor verificar que a maior parte dos alunos não conseguem dar resposta à questão 1.3, solicita a ida ao quadro de um aluno que a tenha resolvido (bem como a 1.1 e 1.2) para que, após resolução, explique aos colegas o seu raciocínio. Após clarificação, o professor promove o trabalho autónomo a pares dando indicação aos alunos para continuarem a realização da tarefa.
Prof: Podem passar para o caderno a resolução das questões 1.1, 1.2 e 1.3 e continuar a resolver a tarefa na folha de resolução.

(5) Discussão / Clarificação da Questão 1- O Professor, durante o momento da resolução autónoma, seleciona as resoluções que possam trazer aprendizagem significativa à maior parte dos alunos e solicita ao respetivo aluno a sua ida ao quadro: ***(30 minutos)***

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.1:

- Representar graficamente a função como uma reta se calcular d(0) e d(1) dado que d(2) obriga a um prolongamento gráfico do eixo dos YY.

Prof: Qual é a expressão algébrica de d(t)? Qual é a expressão algébrica que representa uma reta?

Representa graficamente a função g(x)=x^2, é uma reta? O que podes concluir?

- Não iniciar a representação com t=0 e sim com t=1

Prof: A bola começou a descer o plano no 1º segundo…. O que se passou no 0,5 segundo? "Em que segundo" é que a bola estava parada?

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.2:

- Não se lembrarem da expressão algébrica da t.m.v e o intervalo pedido.

Prof: No contexto do problema como podes encontrar a velocidade média da bola?

Aluno: é a t.m.v.

Prof: E a t.m.v vai ser sempre igual qualquer que seja o movimento que quero estudar? (Não).

Necessitas do quê?

Aluno: "o que me dá a t.m.v e o movimento que quero"

Prof: Ou seja a expressão algébrica da t.m.v e o intervalo de tempo que é…

Aluno: "No 2º. movimento"

Prof: O 2º. movimento é um intervalo? Quais são os extremos do intervalo que quero estudar?

Professor promovendo a autonomia do aluno: Vai consultar os teus apontamentos.

- Não considerar o 0 no intervalo [0, 2]

Aluno no quadro escreve: $\frac{d(2)}{2}$

Prof: Essa é a expressão da t.m.v. que queremos calcular? Como chegaste a essa expressão?

O Professor promove o rigor da escrita (t.m.v. [0, 2] = $\frac{d(2)-d(0)}{2-0}$). Deves agora fazer as substituições… d(2) e d(0). O resultado é o mesmo? Atenção, não tenham pressa em resolver, d(0) pode não ser zero como é o caso…

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.3:

- Não relacionarem o declive da reta secante que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalo [0, 2] como sendo a t.m.v[0, 2].

Prof: Há um resultado muito importante que foi compreendido na última aula. Consulta os teus apontamentos.

- O aluno não se lembra da equação reduzida da reta

Prof: A tarefa anterior tinha uma questão semelhante. Consulta a tua resolução.

- Dificuldade na representação gráfica da reta dado o esboço elaborado.

Prof: Que escala utilizaste na representação gráfica de d? Utiliza a quadrícula da tua folha como unidade.

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.4.1:

- Os alunos calculam $d(2) = 2(2^2) + 4$

O que pede o enunciado? A distância percorrida no instante t=2 ou a velocidade no instante t=2?

Qual a diferença?

O Professor orienta o aluno para concluir que a velocidade está associada à rapidez instantânea (em linguagem comum, velocidade instantânea) e não somente a uma distância. Indica que devem seguir a sugestão indicada.

- Erro na introdução da função na calculadora

Prof: Calcula no teu caderno a velocidade media com h=0.1 e compara-o com o resultado obtido na calculadora...

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.4.2:

- Dificuldade em desenhar as retas porque não considera o intervalo correto:

Ex:

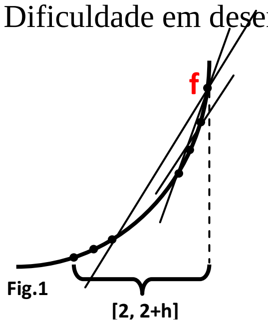


Fig.1

Prof: Tens que intervalos? Olha para a tabela. Qual é o extremo esquerdo? E o direito? Para marcares uma reta quantos pontos necessitas? Lê o enunciado, as retas passam por que pontos?

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.4.2 i):

- Dificuldade em identificar o declive.

Prof: O que está a acontecer às várias retas?

Aluno: Estão a "ir para baixo"

Prof: Uma reta "a subir" ou "a descer" tem um…(declive)

Aluno: Inclinação

Prof: Inclinação se te estás a referir à tangente do angulo que o plano faz com o plano horizontal que acaba por ter o mesmo valor que a expressão $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ que nos dá o quê de uma reta? (declive). Já podes responder à questão.

- Não observar a relação entre h e o declive da reta

Prof: Na tabela (coluna A) o que está a acontecer ao valor de 2+h?

Aluno: está cada vez mais pequeno

Prof: Porquê? O que está cada vez mais pequeno para que isso aconteça? (o h)

E ao mesmo tempo o que acontece ao declive da reta? Se necessário o professor desenha no quadro:

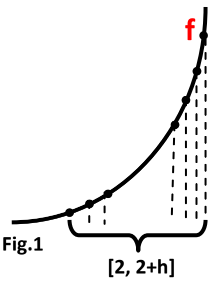


Fig.1

O Professor deve orientar o aluno na compreensão de que "quando h→0; d(t) aproxima-se de" deve ser entendido como "um todo" e não como dois (h→0 e d(t) aproxima-se de) "objetos matemáticos" separados, conforme indicado na fundamentação teórica.

- Dificuldade em contextualizar a situação dada a aplicação de um raciocínio de natureza dinâmica inverso.

Aluno: Não consigo dizer o que se passa com a bola…

Prof: Vamos por partes, o intervalo [2, 2+h] representa o quê? (tempo em segundos).

Como encontraste o declive da reta secante? (Pela t.m.v. [2, 2+h]) que representa…(A velocidade média da bola). Escreve agora o que disseste e à frente as tuas observações. O Professor orienta o aluno para "escrever o raciocínio" da seguinte forma: (alternativa à visualização gráfica)

[2, 2+h] diminui – o tempo reduz

Declive diminui – velocidade média decresce

À medida que o tempo, em segundos, reduz, a velocidade média da bola vai diminuindo.

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.4.2 ii):</u>

- Os alunos identificam o declive com o extremo esquerdo do intervalo

Aluno: O declive é 2.

Prof: O que representa a coluna B do quadro? (A t.m.v [2, 2+h])

Prof: Que é… (O declive da secante). Escreve no topo da coluna o que me disseste.

Prof: A coluna B indica o declive da secante. Que retas estás a desenhar? (As secantes) E dizes que o declive é 2?

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.5:</u>

- Os alunos consideram o declive igual a oito esquecendo a aproximação efetuada dado que a expressão "o limite pode ser aproximado tanto quanto eu queira" pode provocar que alguns alunos afirmem que o processo prático (tabela 1.4) é finito, "logo" a precisão também.

Alunos: O declive é oito, a reta será y=8x-4.

Prof: O declive é 8? Na tabela está 8,002. 8=8,002? (não). A tabela não nos indica um resultado finito, o que nos indica é que a velocidade média <u>se aproxima</u> de oito, não nos diz que é oito. Oito é uma aproximação numérica. Para dizermos que é 8 temos de "passar ao limite" ou seja: $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 8$, por isso vos foi pedida uma conjetura (sublinhado) da equação e não a equação dado que o conceito de limite, <u>nesta situação</u>, ainda não tinha sido compreendido.

- Os alunos consideram o "intervalo [2, 2]"

Alunos: t.m.v. [2, 2] = $\frac{d(2)-d(2)}{2-2} = \frac{12-12}{0} = \frac{0}{0}$

Prof: [2, 2] é um intervalo? Quais são os extremos da secante que passa no "intervalo [2, 2]"? Qual é o domínio da expressão t.m.v. $[x_0, x]$ = $\frac{d(x)-d(x_0)}{x-x_0}$? $(x - x_0 \neq 0)$. 2-2≠0?

O que podes concluir olhando para a expressão que encontraste?

O que representa o h? (amplitude do intervalo). Quando preencheste a tabela o que estava a acontecer ao h? (estava cada vez mais pequeno). Então h→0 não é o mesmo que h=0. Posso aplicar a expressão da t.m.v. com h=0?

O Professor aproveita as dificuldades dos alunos para, neste momento de discussão, introduzir a expressão algébrica da taxa de variação de uma função d quando $x = x_0$ ou derivada da função d no ponto de abcissa x_0.

Prof: Para encontrarmos o resultado vamos recorrer a um conceito já introduzido quando estudaram as assintotas de uma função que é o conceito de limite. Utilizando o cálculo do limite vamos encontrar o significado para a derivada (declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$.

Recorrendo à questão 1.5… O que pretendo estudar é a variação da função cada vez em intervalos mais pequenos. Supomos que o intervalo $[x_0,\ x]$ deixa de ter esta amplitude e passa a ter amplitudes cada vez menores conforme resolveram na sugestão. Quero estudar a função neste ponto (x_0), então vou marcar intervalos cada vez mais pequenos, o que vou querer é que o x tenda para x_0. (Realçar que no limite, a aproximação obtida é igual a zero ou seja o "erro" de aproximação está a decrescer gradualmente).

Se "pegar" neste x e fazer com que se aproxime em limite até x_0 vou obter uma reta especial e que reta é esta?

Se o x, em limite ficar igual a x_0 eu vou obter uma reta… (Alunos: tangente à função no ponto x_0). Então, ao declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0)$ chamamos derivada da função f no ponto x_0 do domínio da função. A derivada dá-nos a variação instantânea. Sistematizando: Se eu quiser que este intervalo $[x_0$,x] deixe de ser um intervalo e passe a ser um ponto, estudando a expressão da t.m.v em limite quando x tende para x_0, estou perante a derivada nesse ponto pertencente ao domínio da função. Tenho uma reta tangente e não uma reta secante.

A derivada de uma função num ponto x pertencente ao seu domínio é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$.

Podemos estudar a variação de uma função num instante, num momento, num ponto que é o que nos pedem na questão 1.5. Temos que: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Sendo h a amplitude do intervalo ou seja $h = x - x_0$,

Temos que: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = Declive da reta tangente no ponto x_0

Professor pede ao aluno que está (ou esteve) no quadro a resolver a questão 1.5 para resolver a mesma aplicando agora a definição de derivada no ponto 2. (ver resolução pág 4).

Recurso *Desmos* a projetar na síntese da aprendizagem: slide - reta secante que se aproxima da reta tangente)

Possíveis dificuldades dos alunos na resolução do limite:

- Dificuldade em absorver, num tempo limitado, novas ideias complexas, conforme refere Tall (1993).
- Procurar a utilização de procedimentos (regras operatórias) conforme refere Tall (1993) resolvendo o limite como uma equação substituindo h=0

O aluno escreve: $d\'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \cdots = \lim_{h\to 0} \frac{d(2)-d(2)}{h} = \frac{12-12}{0} = \frac{0}{0}$

Prof: O conceito de limite não é o mesmo que o conceito de uma equação…não podemos resolver um limite como resolvemos uma equação, h não é uma variável independente, h representa um intervalo.

- O aluno não simplifica ao máximo a expressão:

$$d\ \'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \cdots = \lim_{h\to 0} \frac{8h+2h^2}{h} = \frac{0}{0}$$

O Professor deve alertar que a expressão tem de ser simplificada ao máximo e orientar o aluno para colocar h em evidência (preparando-o, 12ºano, para levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$)

- Representações mentais verbais como "aproximação", "estar próximo de", "tender para" podem conduzir o aluno à possibilidade de pensar que $d\'(x)$ não pode ser um número real, "propriedade" caracterizada, segundo Tall e Vinner (1981) como um fator de conflito potencial.

Aluno: Mas se estou a calcular um limite como posso obter um número? O limite nunca é alcançado…"

Prof: Quando tornaste o intervalo h cada $vez\ ma$is pequeno (h→0), na utilização do recurso *Desmos*, verificaste que a secante aproximava-se da tangente no ponto 2 ou seja o declive da reta secante (número real) aproximava-se para o declive da reta tangente (que é outro número real).

O limite pode ser alcançado ou não. Neste caso é alcançado e é 8.

- “Esquecimento” do denominador (h) durante o cálculo do limite e não colocarem $\lim\limits_{h \to 0}$ antes da expressão algébrica.

O Professor, durante a resolução do aluno no quadro deve realçar com outra cor de giz estas situações. Após resolução do aluno, deve questionar: Olha para o realce, não te desperta nada? O Professor orienta o aluno para descobrir as diferenças:

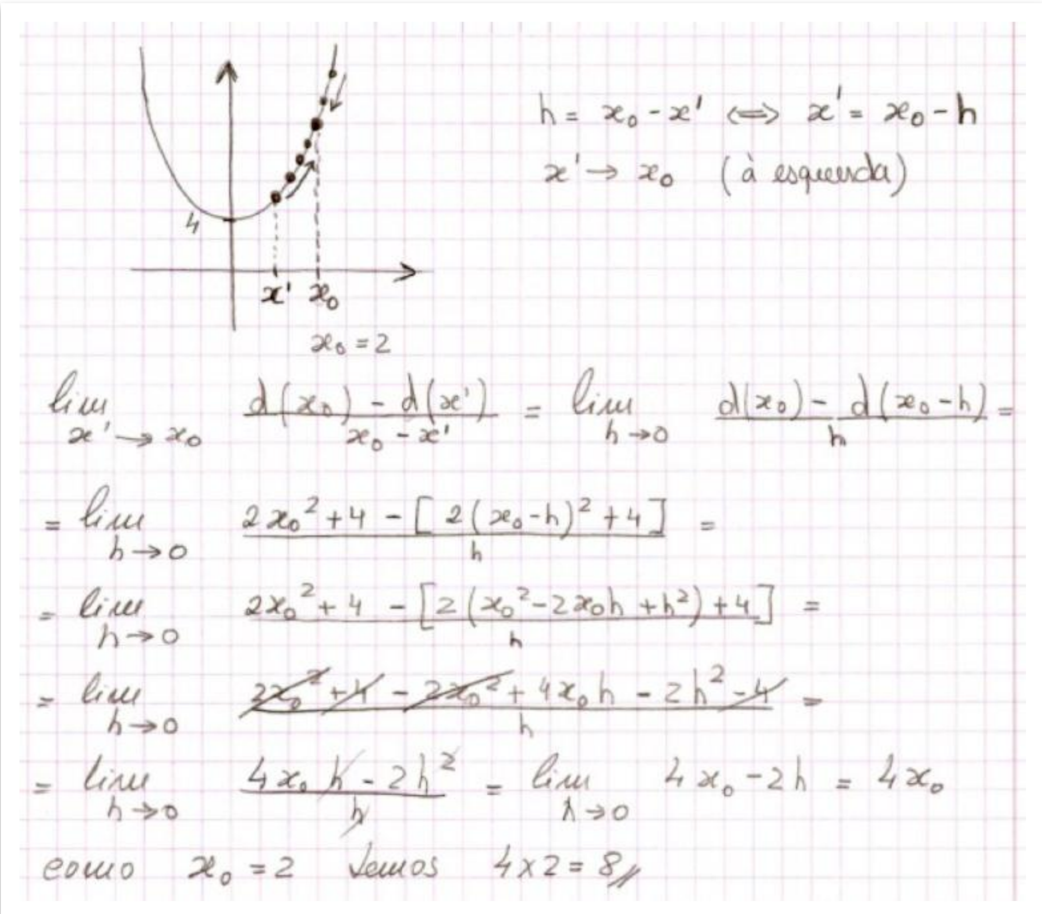
Escrever $d'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \cdots = 8h + 2h^2$ está correto? Qual o resultado? É o correto?

Escrever $d\ '(2) = \lim_{h \to 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \cdots = \frac{8h+2h^2}{h}$ está correto? (não) Porquê?

Outra dificuldade ou proposta do Professor (E se o intervalo h for à esquerda?) extensão do problema:

Aluno: Não podemos fazer h como sendo a amplitude do intervalo à esquerda de x_0?

Prof: Vamos então representar graficamente e algebricamente o que estás a dizer e analisar o resultado:



$h = x_0 - x' \iff x' = x_0 - h$

$x' \to x_0$ (à esquerda)

$$\lim_{x' \to x_0} \frac{d(x_0) - d(x')}{x_0 - x'} = \lim_{h \to 0} \frac{d(x_0) - d(x_0 - h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0^2 + 4 - [2(x_0 - h)^2 + 4]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0^2 + 4 - [2(x_0^2 - 2x_0 h + h^2) + 4]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x_0^2} + \cancel{4} - \cancel{2x_0^2} + 4x_0 h - 2h^2 - \cancel{4}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x_0 h - 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 4x_0 - 2h = 4x_0$$

como $x_0 = 2$ temos $4 \times 2 = 8$

Qual o significado?

Os vários declives das retas secantes que passam nos pontos extremos do intervalo $[x', x_0]$ (esquerda de x_0) e $[x_0 - x']$ (direita de x_0) aproximam-se do declive da reta tangente ao pontox_0, que é 8 e único.

Uma reta quantos declives pode ter? (um, unicidade)

Não interessa se o intervalo está à esquerda ou à direita do ponto de tangência, o resultado é único.

(6) Síntese das aprendizagens: Projeção do *PPT (5 minutos)*

(7) Resolução de exercícios do manual – Os alunos resolvem autonomamente e a pares os exercícios nºs 43/44/45/46 (pp. 43-46) **(10 *minutos)***

(8) Discussão / Clarificação dos exercícios - O Professor, durante o momento da resolução autónoma, seleciona as resoluções que possam trazer aprendizagem significativa à maior parte dos alunos e solicita ao respetivo aluno a sua ida ao quadro: ***(10 minutos)***

(9) Síntese das aprendizagens: Projeção dos slides *(5 minutos)*

NOTA: Tempo excedente – ***(5 minutos)***

APRENDIZAGEM COMPLEMENTAR

Tarefa 13- “Enchimento do depósito” do manual, p.64

PROSSECUÇÃO DAS APRENDIZAGENS

- Regras de derivação.

AVALIAÇÃO

- Avaliação sumativa - A ser decidida pela Professora Cooperante.
- Avaliação reguladora por observação direta:

Capacidade de raciocínio e comunicação (justificar, conjeturar, formular, sentido crítico na argumentação), participação oral nas discussões, rigor matemático (escrito e em linguagem natural), autonomia e colaboração com os colegas.

TAREFA

Tarefa adaptada de:
Costa, B., & Rodrigues, E. (2013). Novo Espaço Matemática A 11º. Ano (p. 58). Lisboa: Porto Editora
e
Teixeira, P. et al. (1998). *Funções: matemática – 11.ºano de escolaridade (p.100).* Lisboa: MEC. Disponível em http://www.dge.mec.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=148#i

Nota: Algumas questões foram elaboradas de acordo com a fundamentação teórica (três representações) e tendo como objetivo uma análise futura a algumas das principais dificuldades que os alunos evidenciam na apropriação do conceito de limite e na sua utilização (Ex: 1.4.2 i e 1.5).

PLANO – “A subida da caixa”

Aula de 90 min (dois tempos) a realizar no dia 17/04/2015 das 08.15h/9.45h
Turma de Matemática A do 11º ano

Sumário (no início da aula)
Regras de derivação. Resolução da Tarefa 3 - “A subida da caixa ”.

TÓPICOS / SUBTÓPICOS

- Interpretação geométrica da taxa de variação.
- Generalização da expressão algébrica da derivada de funções afim, polinomiais do 2º grau e funções racionais do tipo $y = \frac{a}{x}, a, x \neq 0$.
- Regras de derivação. (a introduzir 11ºano por planeamento da escola).

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Perspetivar a matemática como uma ciência em construção.
- Deduzir, calcular e interpretar geometricamente a expressão algébrica da derivada de funções afins, polinomiais do 2º grau e funções racionais do tipo $y = \frac{a}{x}, a, x \neq 0$.
- Formular generalizações a partir de problemas contextualizados na vida real.
- Perspetivar a formalização do conceito de limite de forma intuitiva e formal
- Explorar e articular a representação gráfica, numérica e algébrica de funções
- Explorar a relação entre as representações gráficas de uma função, da tangente a um ponto da mesma e sua função derivada.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS POR QUESTÃO DA TAREFA:

Objetivos para questão 1:

- Explorar graficamente o conceito de função.
- Promover a manipulação algébrica de variáveis.
- Promover competências ao nível da capacidade de abstração.

- Relacionar os significados geométricos da velocidade média e instantânea.
- Relacionar geometricamente a t.m.v $[\ x_0,\ x_0+h]$ com $f'(x_0)$ através da noção intuitiva de limite.
- Estabelecer conexões entre os conceitos compreendidos (t.m.v./velocidade média $[x_0,\ x_0+h]$, velocidade instantânea/derivada).
- Deduzir o número real limite da razão incremental (representação algébrica), $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- Compreender que o "limite pode ser alcançado" (dificuldade reportada na fundamentação teórica).
- Revelar sentido crítico, de rigor e de confiança nos raciocínios.
- Explorar o contexto de formas diversas (Ex: por definição de $f\ ´(x_0)$ ou da passagem ao limite da expressão algébrica da secante).
- Promover a fluência na utilização de várias representações (gráfica e algébrica) conforme fundamentação teórica.
- Relacionar as representações gráficas da função derivada com a própria função, no caso particular das funções afim.

Objetivos para questão 2:

- Compreender o conceito de função derivada num intervalo pertencente ao domínio da função.
- Explorar a representação gráfica da derivada de uma função afim.
- Descobrir a generalização da derivada de uma função afim a partir de problemas contextualizados na vida real.

Objetivos para questão 3:

- Consolidar a representação algébrica da derivada de uma função afim por compreensão do conceito.
- Estabelecer conexões entre conceitos (função derivada e função afim).
- Despertar o sentido crítico para um futuro tema (Primitivas).

Objetivos para questão 4:

- Encontrar a regra de derivação para funções afim.

- Descobrir que a derivada de uma função constante é 0. (Casos $u(x) = b$ e $i(x) = 0$).
- Descobrir que a derivada da função identidade é 1. (Caso $v(x) = x$).
- Consolidar aprendizagem anterior acerca do "declive" de uma reta vertical (Caso $x = 1$).

Objetivos para questão 5:

- Relacionar graficamente a função derivada com a própria função, no caso particular das funções polinomiais do 2º grau.
- Deduzir a generalização da derivada das funções polinomiais do 2º grau.
- Compreender a saber usar o conceito de limite.
- Promover a fluência na utilização de várias representações (gráfica, numérica e algébrica) conforme fundamentação teórica.
- Exprimir o significado de derivada (declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$ utilizando a representação gráfica, numérica e linguagem natural.
- Clarificar a diferença entre a reta tangente à função num ponto e o gráfico da função derivada.

Objetivos para questão 6:

- Obter algebricamente a generalização da derivada das funções racionais do tipo $y = \frac{a}{x}, a, x \neq 0$.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Conhecimentos do Tema "Funções e Gráficos" do 10º. Ano, em particular: Interpretação de gráficos de funções, equação reduzida da reta / equação geral da reta, declive de uma reta, reta tangente a um ponto, desenvolvimento de casos notáveis e função constante.
- Conceito de limite (de forma intuitiva e formal)
- t.m.v [a, b] e derivada associada à interpretação geométrica (declives de secantes e tangentes às curvas das funções).
- t.m.v [a, b] e derivada associadas à velocidade média e velocidade instantânea, respetivamente.

- Expressões algébricas da t.m.v [a, b] e derivada (declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$).

RECURSOS

- **Do professor:** Computador com *PPT* e recurso *Desmos* para exploração gráfica da t.m.v. Tarefa para distribuição aos *alu*nos e giz d*e vári*as cores.

Avisar que o Professor necessita da sala às 8.00h.

- **Dos alunos:** Caderno diário, papel, material de escrita, régua, manual didático e calculadora gráfica.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

Comunicação matemática, autonomia, sentido crítico na argumentação e raciocínio matemático.

METODOLOGIA

- Alusão à História da Matemática.
- Utilização da calculadora em sala de aula como instrumento de investigação (Ex: visualização gráfica para ilustrar o conceito de derivada).
- O Professor, quando circula pela sala durante o trabalho autónomo, questiona o par (ou aluno do par) individualmente, caso ache oportuno, no momento da realização da tarefa a pares.
- O Professor questiona a turma através de questões orientadoras, focalização e inquirição.
- Trabalho autónomo a pares – resolução de uma tarefa exploratória e exercícios do manual para tempo excedente, se for o caso.
- Os alunos resolvem todas/algumas questões no quadro (previamente selecionadas e/ou escolhidas pelo Professor, no decorrer da aula) com subsequente discussão em grande grupo tendo o Professor um papel orientador, incentivando o diálogo e pensamento crítico.
- Sistematização das aprendizagens.

PAPEL DO PROFESSOR:

No momento da distribuição da tarefa:

- O Professor distribui a tarefa solicitando a ajuda de um aluno e indica que os alunos devem resolver as questões de forma ordenada (nº 1, 2…).
- O Professor dá indicação de que a tarefa deve ser feita a pares, numa folha por aluno e a caneta. Caso se enganem devem indicar que não é para considerar (como por exemplo, colocar entre parenteses) e voltar a fazer. Este procedimento é solicitado aos alunos tendo em vista a perceção por parte do professor, quando circular pela sala, do raciocínio dos alunos no desenvolvimento da tarefa e posterior recolha da resolução para análise e inclusão no relatório.
- O Professor dá indicação de que a correção deverá ser feita no caderno diário e a resolução será posteriormente entregue.

Nos momentos de realização autónoma da tarefa:

- Circular pela sala observando as resoluções dos alunos para poder selecionar as resoluções que podem trazer uma discussão produtiva em turma. As resoluções que possam trazer confusão à turma não devem ser selecionadas, porém o professor pode decidir escolher uma resolução que não esteja completamente correta ou completa de forma a levantar questões de raciocínio que possam ser generalizadas.
- O Professor circula pela sala observando as resoluções dos alunos para quando estiver no quadro a sistematizar e clarificar questões, saber em que ponto deve dar mais ênfase, quais as maiores dificuldades dos alunos, qual a fase do problema que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Só deve interferir, colocando questões orientadoras, <u>se verificar que o aluno está bloqueado não prosseguindo o seu trabalho</u>.
- O Professor, perspetivando uma futura reflexão, retira algumas notas com a identificação das maiores dificuldades dos alunos, qual a fase dos problemas que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Caso o Professor verifique que o rendimento de alguns alunos não é o previsto e que os mesmos estão “parados”, deve iniciar breves momentos de clarificação, porém, os alunos que não apresentem dificuldade deverão prosseguir o trabalho.

- Caso o Professor verifique que o rendimento da maior parte dos alunos não é o previsto deve iniciar o momento de discussão.
- Em todas as questões deve solicitar particularmente ao aluno a sua ida ao quadro, confirmando assim o prévio consentimento do mesmo.

Nos momentos de discussão / clarificação das questões:

- Incentivar a reflexão e completude/melhoria das respostas com discussão em turma, aproveitando as intervenções dos alunos.
- No final de cada resolução o Professor deve incentivar a comunicação Professor / Aluno e Aluno / Aluno com questões orientadoras, de focalização e inquirição.
- Promover a capacidade de desenvolver o raciocínio e o pensamento científico.
- Promover a verbalização do raciocínio dos alunos e a discussão dos processos, confrontando-os com outros.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(0) Preparação da aula: Professor entra às 8.00h.

- O sumário, indicação de exercícios do manual e data serão escritos no topo do quadro.
- Preparação do *PPT*, recurso *Desmos* e giz de várias cores.

(1) Início da aula: Entrada dos alunos (8.15m), sumário e indicação dos exercícios do manual que podem ser resolvidos pelos alunos que terminem mais cedo a tarefa (exercícios das margens do manual do nº 45 ao 59 inclusive, pp.66-76). ***(5 min)***

(2) Projeção *PPT*: Conceito de derivada, alusão à História da Matemática – *PPT* *(tempo incluído no momento seguinte)*

(3) Síntese da aula anterior – Revisão do conceito de derivada (taxa de variação instantânea), projetar *PPT*. ***(10 min)***

(4) Distribuição da tarefa - Indicação dos procedimentos a ter e objetivação do trabalho a desenvolver que é o de deduzir, calcular e interpretar geometricamente a expressão algébrica da derivada e obter a regra de derivação, em alguns casos particulares.

Um aluno lê o enunciado do problema (Parte I) e esclarecem-se possíveis dúvidas de interpretação. ***(tempo incluído no momento seguinte)***

Possíveis dificuldades dos alunos na interpretação:

Alunos: o que é "significado geométrico"?

Prof: Em geometria estudamos a posição e forma de objetos no espaço, o que eles representam, as suas propriedades como por exemplo.

Neste caso o que representa, geometricamente a t.m.v? (declive da reta secante)…

(5) Realização da Parte I – Os alunos resolvem autonomamente e a pares.

(15 minutos)

NOTA: Se o professor verificar que a maior parte dos alunos não conseguem dar resposta a alguma questão, solicita a ida ao quadro de um aluno que a tenha resolvido para que, após resolução, explique aos colegas o seu raciocínio. Após clarificação, o professor promove o trabalho autónomo a pares dando indicação aos alunos para continuarem a realização da tarefa.

Prof: Podem passar para o caderno a resolução da questão e continuar a resolver a tarefa na folha de resolução.

(6) Discussão / Clarificação da Parte I: O Professor, durante o momento da resolução autónoma, seleciona as resoluções que possam trazer aprendizagem significativa à maior parte dos alunos e solicita ao respetivo aluno a sua ida ao quadro: ***(25 minutos)***

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.1:

- Não relacionarem o declive da reta secante que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalo $[x_0, x_0 + h]$ como sendo a t.m.v$[x_0, x_0 + h]$.

O Professor deverá promover a autonomia dos alunos solicitando a consulta ao caderno diário.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.2:

- Não identificarem o intervalo pedido.

Prof: Lê o enunciado, qual é o intervalo indicado?

- Sobreposição da representação da reta com o gráfico da função.

Aluno: Não estou a perceber… a reta é a mesma!

Prof: A reta "r" representa o quê? Desenha no teu papel $f(x) = x^2$ e constrói o que te é pedido em 1.2. Neste caso não tens duvidas...

O Professor orienta o aluno, através da função desenhada a chegar à conclusão que no caso de uma função afim a representação gráfica da secante coincide com a própria representação gráfica da função.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.3:

- Não relacionarem a velocidade instantânea com $f'(x_0)$ e dificuldade de manipulação algébrica no cálculo do limite e outras (reportadas no plano de aula anterior).

O Professor deverá promover a autonomia dos alunos solicitando a consulta ao caderno diário.

- Ausência de confiança nos raciocínios.

Aluno: Está muito confuso… É sempre a mesma reta! O declive é sempre o mesmo.

O Professor promove a autonomia do aluno: Deves ter confiança no teu trabalho. Aplicaste com rigor os teus conhecimentos, chegaste a uma conclusão através de um raciocínio correto, o que te parece mal? O que podes concluir?

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.4:

- Não relacionarem o declive da reta tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$ com a velocidade instantânea no instante x_0.

Prof: Há um resultado muito importante que foi compreendido na última aula. Consulta os teus apontamentos.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.5:

- Ausência de confiança nos raciocínios.

Aluno: Outra reta igual…

O Professor, caso a dúvida e ausência de confiança do resultado sejam generalizados em turma deve iniciar um momento de discussão solicitando a ida de um aluno ao quadro, que após resolução, explique aos colegas o seu raciocínio. O Professor orienta a discussão e sequencia o significado de cada conceito (declive da reta da função afim, declive da secante, declive da reta tangente) encaminhando os alunos para a propriedade de que os declives das retas traçadas são iguais (e porquê), no caso de funções afim. A orientação será apoiada com exemplo gráfico no quadro e se necessário com o recurso *Desmos*. https://www.desmos.com/calculator/dlzhsldcgo

O Professor faz referência, no caso do declive da reta tangente, ao conceito de limite orientando os alunos para verificarem que a alteração à amplitude do intervalo, ou seja $h = x - x_0$, neste caso, não implica alteração aos declives das várias retas tangentes.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1.6:

- Não se preveem dificuldades, após clarificação da questão 1.5

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 2.1:

- Não conhecer o significado simbólico de $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Prof: x está entre que valores? Está dentro do intervalo? Qual o símbolo matemático que te indica isso?

- Não compreender o conceito de função derivada num intervalo pertencente ao domínio da função:

Aluno: $f'(x)$? Então não é $f'(x_0)$?

Prof: Boa observação. x pertence a que intervalo? Estamos a tentar encontrar o valor da derivada para qualquer ponto pertencente a este intervalo. Quantos pontos existem neste intervalo? (infinitos), o que queremos é encontrar uma expressão que nos indique $f\,'(x)$ qualquer que seja o x, pode ser $f\,'(x_1), f\,'(x_2), f\,'(x_3)$ … Contextualizando podemos querer a velocidade instantânea da caixa no minuto 3, 4, 5… Queremos encontrar uma generalização.

- Dificuldades na manipulação algébrica da expressão $f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ já reportadas no plano da aula anterior.

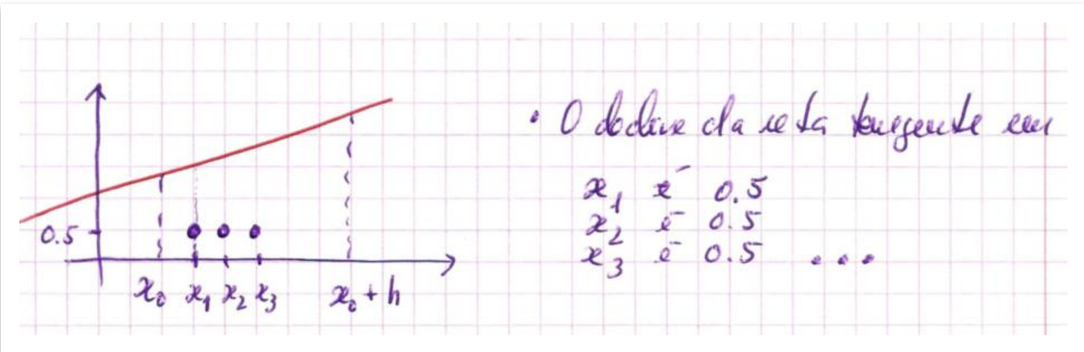
O Professor deve orientar o aluno para o rigor na escrita e alertar para "esquecimentos" comuns (troca de sinais, simplificação etc.)

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 2.2:

- Representar a reta tangente “r” e não a representação gráfica de $f'(x)$ (y=0.5)

Aluno: Já tinha feito, é a reta “r”.

Prof: O que concluíste acerca do valor de $f'(x)$? ($f'(x) = 0.5$). O que significa? (Que o declive da reta tangente em qualquer ponto $(x, f(x))$ é 0.5). Marca no referencial o que me estás a explicar. O Professor orienta o aluno para a representação gráfica abaixo indicada e solicita-lhe que trace a reta que contem todos os pontos marcados. O professor certifica-se de que o aluno está a construir um “conceito imagem” consistente: E se o valor do declive fosse 0.7 como representavas a função derivada?



- Não se lembrar da função constante

Prof: Uma função pode ser crescente……(decrescente) e quando não é crescente nem decrescente? O que significa não ser crescente nem decrescente? Consulta os teus apontamentos da aula anterior quando referimos o quadro de variação de uma função.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 3:

- Frágil apropriação do conceito de limite e sua utilização.

O aluno tenta resolver a equação:

O aluno escreve: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.7 <=> f(x+h) - f(x) = 0.7h$ para encontrar $f(x)$…

Prof: O conceito de limite não é o mesmo que o conceito de uma equação…não podemos resolver um limite como resolvemos uma equação.

O Professor deverá tentar clarificar a dificuldade do aluno porém, caso não seja uma dificuldade generalizada, deve ter em conta o trabalho a desenvolver com toda a turma. Neste caso, propõe ao aluno um tempo fora do contexto de sala de aula para futura clarificação.

- Aplicar um raciocínio inverso.

Aluno: "Isto está ao contrário".

Prof: Não podes estabelecer nenhuma relação? Interpreta geometricamente a função derivada? $f\ ´(x)$ é uma função constante e $f\ ´(x) = m$. O que representa o m? (declive da reta tangente). Só? O que verificas na tua fig.1? Só tens uma reta traçada com declive m? (não, tenho três!). O que queres relacionar? (declive da tangente e declive da reta que representa a função afim). São diferentes? (Não, m é o declive da reta que representa graficamente a função f). Agora conclui.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 4:

- Em notar que: $\frac{x}{5} = \frac{1}{5}x$

Prof: tens que "g´(x)=$\frac{x}{5}$". Na alínea anterior disseste que f´(x) era uma função constante, concluíste que a derivada de uma função afim é uma função constante. g´(x) é constante? g'(2)=g'(3)? Olha para g(x) qual é o declive dessa reta? ($\frac{1}{5}$). Podes agora preencher corretamente.

- Em notar que: $x = 1(x)$

Prof: Estar x é o mesmo que estar…..Qual é o elemento neutro da multiplicação (1)?

- Em resolver u(x)=b

Prof: O que representa y=b? (reta horizontal). Qual é o seu declive? (zero). Já consegues resolver. Qual é a derivada de y=b? (zero). Outra forma: a reta y=b pode ser escrita de outra forma, qual? Se quiseres representar o x como a escreves? (y=0x+b). Qual o declive? (zero). A função derivada de f(x)=b é a função nula.

- Em resolver x=1

Aluno: É uma reta vertical…"o declive é 1"?

Prof: Uma reta vertical tem declive? (não) Porquê? (aprendi assim). Dá-me dois pontos que passam na reta x=1 (1, 2) e (1, 5). Encontra o declive desta reta ($\frac{5-2}{1-1} = \frac{3}{0}$) e…(não está definido). Agora sabes uma justificação. Podemos encontrar outra

justificação. Escreve no teu caderno: declive de uma reta vertical / o que define uma função. Amanhã vens-me explicar a tua justificação.
Caso a dúvida seja generalizada o Professor solicita ao aluno para colocar a questão em turma.

(7) Síntese das aprendizagens: Projeção do *PPT (tempo incluído no momento seguinte)*

(8) Resolução da Parte II – O Professor indica aos alunos que irão necessitar da calculadora e esclarecem-se possíveis dúvidas de interpretação. Os alunos resolvem autonomamente e a pares
(10 minutos)

(9) Discussão / Clarificação da Parte II: O Professor, durante o momento da resolução autónoma, seleciona as resoluções que possam trazer aprendizagem significativa à maior parte dos alunos e solicita ao respetivo aluno a sua ida ao quadro: ***(20 minutos)***

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 5.1:

- Manuseamento da calculadora

Prof: Projeta *PPT*
O Professor deve alertar os alunos para o uso da calculadora: Há casos em que a calculadora apresenta resultados errados, como por exemplo para f(x)=|x-2|+1. A calculadora apresenta o valor 0 para f'(2) mas não existe derivada no ponto x=2. Estes casos serão estudados mais tarde.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 5.2:

- Dificuldade em atribuir significado

Aluno: Quando o x=-2, f'(x)=-4
Prof: Estás a dizer-me o que está lá escrito mas o que te perguntam é o que significa.
O que representa a derivada no ponto x? (declive da tangente ao gráfico da função no ponto (x, f(x)). Agora estás a atribuir um significado! Já podes resolver a questão.

- Não se recorda que a derivada é o declive da tangente ao gráfico da função no ponto (x, f(x)).

Professor promovendo a autonomia do aluno: Consulta as últimas tarefas / teu caderno diário.

- Confunde f(x) com f'(x)

Aluno: mas o ponto está errado! Deve ser (-2,4) e não (-2,-4), qualquer número ao quadrado é positivo.

Prof: 4? Porquê? ($2^2 = 4$). Em que função? (f). O que te pedem? Tens (x,f´(x))=(-2,-4), quando é que dois pares ordenados são iguais?

O Professor orienta o aluno para concluir que x=-2 e f´(x)=-4 e solicita-lhe para verificar a tabela que elaborou.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 5.3:

- Não interpretar corretamente a representação gráfica da tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$.

O Professor apoia-se no recurso *Desmos* https://www.desmos.com/calculator/dlzhsldcgo e questiona:

Temos representada a função f(x) e f´(x). A reta a vermelho é a reta representada nos gráficos da questão 5.3.

Temos o par (-2, -4). O que me sabem dizer acerca do seu significado? (alínea anterior)

Na função f temos o ponto (-2, 4). Reparem na reta tangente (vermelha), tem declive… (negativo). Vamos agora à função derivada (reta preta). A abcissa -2, que ordenada tem? (-4).

Quantas representações estão na projeção? (3). Identifiquem-nas e …voluntário para me dizer o significado de cada uma.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 5.4:

- O aluno calcula pontos de f(x)

Aluno escreve: (1,1), (2,4) , $m = \frac{4-1}{2-1} = 3$, y=3x+b como passa no ponto (0,0) b=0. y=3x

Prof: Na tua tabela onde está o ponto (2,4)? Como construíste a tua tabela? Onde desenhaste a representação gráfica pedida? Aconselho-te a releres o enunciado, fazeres com calma. Depois disso, se tiveres tempo, escreve na folha o que estavas a fazer de errado.

- Não se recorda da expressão algébrica que define uma reta/ como achar o declive/como encontrar o valor de b.

Professor promovendo a autonomia do aluno: Consulta as últimas tarefas / teu caderno diário.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 5.5:

- Manipulação algébrica: factorização, simplificações, produtos notáveis entre outras, conforme fundamentação teórica.

Professor deve colocar questões de focalização, inquirição e orientação como por exemplo:

Atenção ao sinal… Explica o teu raciocínio. $(x+2)^2 = x^2 + 2^2$???? "Mostra a igualdade".

- Não se recorda da definição de derivada

Professor promovendo a autonomia do aluno: Consulta as últimas tarefas / teu caderno diário.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 5.6:

- Mesmas que a questão anterior
- Não reconhecer "a" como constante.

Aluno: O que é o "a"? Deu-me y=2ax

Prof: No enunciado o "a" pertence a… (R). Dá-me um exemplo (3). O que deves fazer agora? (substituir o "a" por 3), que dá…(y=(2)(3)(x)=6x).

Encontraste uma generalização para a função derivada de uma função polinomial de 2ºgrau.

Já agora… em f(x)=ax^2 se o "a" for negativo o que me sabes dizer acerca da concavidade do gráfico da função? (está voltada para baixo). Consegues relacionar esse facto com o declive da tangente? Nota: O Professor poderá decidir se coloca esta questão em discussão na sala de aula: O(a) colega tem uma questão interessante… Diz aos colegas a tua questão. O que pensam sobre isto?...

Pode proporcionar uma abordagem inicial na aula subsequente; que tem como objetivo específico variação da função/sinal da derivada.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 5.7:

- Não reconhecer a função afim.

Professor promovendo a autonomia do aluno: Consulta as últimas tarefas / teu caderno diário.

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 6:

- Manipulação algébrica ou escrita, como por exemplo:

$$\bullet\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\frac{a}{x}} + h - \cancel{\frac{a}{x}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\bullet\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a}{x+h} - \frac{a}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a\cancel{x} - a\cancel{x} - ah}{h} = -a$$

$$\bullet\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a}{x+h} - \frac{a}{x} = ax - a(x+h) = ax - ax - h = 0$$

etc...

(10) Síntese das aprendizagens: Projeção do *PPT (5 minutos)*

O Professor dá tempo aos alunos para passarem para o caderno o que está escrito no quadro e pergunta aos alunos se existem algumas dúvidas.

APRENDIZAGEM COMPLEMENTAR

Exercícios das margens do manual do nº 45 ao 59 inclusive, pp.66-76

PROSSECUÇÃO DAS APRENDIZAGENS

- Aplicação das derivadas ao estudo do sentido de variação de uma função.
- Sinal da função derivada e extremos relativos de uma função.

AVALIAÇÃO

- Avaliação sumativa - A ser decidida pela Professora Cooperante.
- Avaliação reguladora por observação direta:

Capacidade de raciocínio e comunicação (justificar, conjeturar, formular, sentido crítico na argumentação), participação oral nas discussões, rigor matemático (escrito e em linguagem natural), autonomia e colaboração com os colegas.

TAREFA

Parte I – Elaborada a partir dos objetivos propostos.

Parte II – Adaptada de:
Teixeira, P. et al. (1998). *Funções: matemática – 11.ºano de escolaridade (p.108).*
Disponível no *web site* do: Ministério da Educação e Ciência:
http://www.dge.mec.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=148#i

com a inclusão das alíneas 5.2 e 5.3 elaboradas a partir dos objetivos propostos.

PLANO – “Extra”

Aula de 90 min (dois tempos) a realizar no dia 23/04/2015 das 08.15h/9.45h
Turma de Matemática A do 11º ano

Nota: Este plano extra foi elaborado dada a marcação inesperada de uma visita de estudo, a ter lugar no dia 24/04 coincidente com a aula dedicada à prática de exercícios do manual. Estes exercícios destinam-se à consolidação do manuseamento algébrico no cálculo da derivada para preparação ao teste de avaliação a realizar no dia 30/04.

Sumário (no início da aula)
Síntese das regras de derivação. Resolução de exercícios do manual.

TÓPICOS / SUBTÓPICOS

- Regras de derivação.
- Derivada de uma função, por definição.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Clarificação da definição geral de reta tangente.
- Sintetização das regras de derivação.
- Estudo dos pontos angulosos.
- Resolução de exercícios do manual para consolidação de conhecimentos.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Conhecimentos do Tema “Funções e Gráficos” do 10º. Ano, em particular: Interpretação de gráficos de funções, declive de uma reta, reta tangente a um ponto.
- Conceito de limite (forma intuitiva e formal)
- Expressão algébrica da derivada de uma função.
- A derivada de uma função constante é 0 e da função identidade é 1.

- A derivada de uma função afim é uma função constante de domínio R.

RECURSOS

Do professor: Computador com todos os *PPT* utilizados ao longo das quatro aulas e recurso *Desmos* para exploração gráfica da função derivada, caso seja oportuno. Manual didático e giz de várias cores.

<u>Avisar que o Professor necessita da sala às 8.00h.</u>

Dos alunos: Caderno diário, papel, material de escrita e manual didático.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

Comunicação matemática, autonomia e articulação com os conceitos compreendidos.

METODOLOGIA

- O Professor, quando circula pela sala durante o trabalho autónomo, questiona o par (ou aluno do par) individualmente, caso ache oportuno, no momento da realização dos exercícios a pares.
- O Professor questiona a turma através de questões orientadoras, focalização e inquirição.
- Trabalho autónomo a pares – resolução de exercícios do manual.
- Os alunos resolvem todas/algumas questões no quadro (previamente selecionadas e/ou escolhidas pelo Professor, no decorrer da aula) com subsequente discussão em grande grupo tendo o Professor um papel orientador, incentivando o diálogo e pensamento crítico.
- Utilização (por parte dos alunos e Professor) do recurso *Desmos* para explorar graficamente as funções propostas nos exercícios.
- Sistematização das aprendizagens.

PAPEL DO PROFESSOR:

- O Professor dá indicação de que os exercícios devem ser feitos a pares, numa folha por aluno e a caneta. Caso se enganem devem indicar que não é para considerar (como por exemplo, colocar entre parenteses) e voltar a fazer. Este procedimento é solicitado aos alunos tendo em vista a perceção por parte do professor, quando circular pela sala, do raciocínio dos alunos no desenvolvimento dos exercícios e posterior recolha da resolução para análise e inclusão no relatório.

- O Professor dá indicação de que a correção deverá ser feita no caderno diário e a resolução será posteriormente entregue.

Nos momentos de realização autónoma dos exercícios:

- Circular pela sala observando as resoluções dos alunos para poder selecionar as resoluções que podem trazer uma discussão produtiva em turma em particular com os significados compreendidos. As resoluções que possam trazer confusão à turma não devem ser selecionadas, porém o professor pode decidir escolher uma resolução que não esteja completamente correta ou completa de forma a levantar questões de raciocínio que possam ser generalizadas.
- O Professor circula pela sala observando as resoluções dos alunos para quando estiver no quadro a sistematizar e clarificar questões, saber em que ponto deve dar mais ênfase e quais as maiores dificuldades dos alunos.
- Só deve interferir, colocando questões orientadoras, se verificar que o aluno está bloqueado não prosseguindo o seu trabalho.
- O Professor, perspetivando uma futura reflexão, retira algumas notas com a identificação das maiores dificuldades dos alunos, qual a fase dos problemas que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Caso o Professor verifique que o rendimento de alguns alunos não é o previsto e que os mesmos estão "parados", deve iniciar momentos de clarificação, porém, os alunos que não apresentem dificuldade deverão prosseguir o trabalho.
- Caso o Professor verifique que o rendimento da maior parte dos alunos não é o previsto deve iniciar um momento de discussão.
- Em todas questões os exercícios deve solicitar particularmente ao aluno a sua ida ao quadro, confirmando assim o prévio consentimento do mesmo.

Nos momentos de discussão / clarificação das questões:

- Incentivar a reflexão e completude/melhoria das respostas com discussão em turma, aproveitando as intervenções dos alunos.

- No final de cada resolução o Professor deve incentivar a comunicação Professor / Aluno e Aluno / Aluno com questões orientadoras, de focalização e inquirição.
- Promover a capacidade de desenvolver o raciocínio e a conexão aos conhecimentos adquiridos.
- Promover a verbalização do raciocínio dos alunos e a discussão dos processos, confrontando-os com outros.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(0) Preparação da aula: Professor entra às 8.00h.

- O sumário, indicação de exercícios do manual e data serão escritos no topo do quadro.
- Esboço da tabela da questão 4.
- Preparação dos *PPT* das últimas aulas e *Desmos*.

(1) Início da aula: Entrada dos alunos (8.15m), sumário e indicação dos exercícios do manual a serem resolvidos pelos alunos. (exercícios das margens do manual nº 50, 51 e 54, pp.73-74 e nº55 ao 59, pp.74-76 para os que acabem mais cedo). ***(tempo incluído no momento seguinte)***

(2) Síntese da aula anterior ***(5 min)***

- **Clarificação da definição de reta tangente:**

O Professor no quadro desenha uma circunferência e o esboço de uma função afim.

Prof: Em anos anteriores estudaram que a reta tangente no caso da circunferência ou seja que qualquer reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no PONTO DE TANGÊNCIA (único).

É comum pensar-se no conceito de reta tangente a uma circunferência, no plano.

A reta tangente a uma circunferência num ponto é definida como a reta que interseta a circunferência exatamente, e só, nesse ponto.

Esta **não é a definição geral formal** de reta tangente ao gráfico de uma função num ponto.

A **definição** de reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abcissa x_0. é a reta que passa no ponto P(x_0., f(x_0.)), pertencente ao domínio da função, e tem como declive a derivada de f em x_0.

Como na função afim os declives das retas tangentes são iguais concluímos que há sobreposição das mesmas com a representação gráfica da própria função. **Projetar *PPT*.**

- **Derivada de uma função afim:**

Prof: Na aula anterior deduziram a derivada de uma função afim tendo concluído que a mesma era uma constante.

Professor no quadro escreve: **f(x) = mx + b / f'(x) = m**

(3) Discussão da questão 4 da Tarefa 3. ***(5 min)***

Prof: Vamos completar a tabela 4.1 da tarefa 3.

Os alunos, oralmente, preenchem a tabela (esboço já elaborado no quadro no momento da preparação da aula).

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 4.1:

- Em notar que: $\frac{x}{5} = \frac{1}{5}x$

Prof: tens que "g´(x)=$\frac{x}{5}$". Na alínea anterior disseste que f´(x) era uma função constante, concluíste que a derivada de uma função afim é uma função constante. g´(x) é constante? g'(2)=g'(3)? Olha para g(x) qual é o declive dessa reta? ($\frac{1}{5}$). Podes agora preencher corretamente.

- Em notar que: $x = 1(x)$

Prof: Qual é o quociente de x? Qual é o elemento neutro da multiplicação (1)?

- Em resolver u(x)=b

Prof: O que representa y=b? (reta horizontal). Qual é o seu declive? (zero). Já consegues resolver. Qual é a derivada de y=b? (zero). Outra forma: a reta y=b pode ser escrita de outra forma, qual? Se quiseres representar o x como a escreves? (y=0x+b). Qual o declive? (zero). A função derivada de f(x)=b é a função nula.

- **Breve discussão da 4.2**

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 4.2:

- Em resolver x=1

Aluno: É uma reta vertical…"o declive é 1"?

Prof: Uma reta vertical tem declive? (não) Porquê? (aprendi assim). Dá-me dois pontos que passam na reta x=1 (1, 2) e (1, 5). Encontra o declive desta reta ($\frac{5-2}{1-1} = \frac{3}{0}$) e…(não está definido). Agora sabes uma justificação. Podemos encontrar outra justificação. Escrevam no vosso caderno: declive de uma reta vertical / o que define uma função. Na próxima aula podem explicar a vossa justificação.

(4) Resolução e discussão da questão 5.5 e 5.6 *10 minutos*

Um aluno deduz no quadro, pela definição de derivada, a expressão algébrica da função derivada de uma qualquer função quadrática $f(x) = ax^2, a \in R$ e conclui que a derivada de uma função quadrática de domínio R é uma função afim.

Prof: E se x=2 e a=1 qual seria o valor de f´(2)? (4). O Professor vai questionando a turma para vários valores de x e ao mesmo tempo vai traçando o gráfico da reta de f'(x).

Nota: Esta foi a estratégia adotada para os alunos concluírem que a derivada de uma função afim é uma função constante. Nesta turma, esta estratégia resultou numa aprendizagem significativa porque as resoluções escritas da maior parte dos alunos assim o revelam.

O Professor pode também questionar qual é a representação gráfica de uma função do tipo f(x)=2ax (reta), e questionar o que podemos concluir acerca da derivada de uma função polinomial de 2º grau ou qual é a derivada de uma função quadrática? (Reforça a definição de função quadrática) já que a sua expressão algébrica é f'(x)=2ax.

Possível dificuldade: Definição de função quadrática.

Aluno: 1/($x^2 + 1$) é uma função quadrática, "o x é quadrado", a derivada é uma reta?

Prof: O facto de o x ter grau 2 não significa que seja uma função quadrática. Uma função quadrática é uma função polinomial de grau 2.

1/($x^2 + 1$) é uma função racional onde o denominador é um polinómio de 2º grau e o numerador um polinómio de grau zero. A sua derivada não é uma função afim.

O Professor promove a discussão em turma para que os alunos encontrem a expressão derivada de $f(x) = ax^n$ $(f'(x) = nax^{n-1})$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$ (derivar segundo as regras cada parcela.

Nota: Nesta fase os alunos já deduziram e compreenderam a derivada de uma função quadrática, afim e constante.

O Professor projeta em PPT as regras de derivação e é distribuída aos alunos uma cópia das mesmas.

Projetar *PPT*.

(5) Realização dos exercícios do manual – Os alunos resolvem autonomamente e a pares os exercícios 50, 51 e 54 do manual. ***(15 minutos)***

NOTA: Se o professor verificar que a maior parte dos alunos não consegue dar resposta a alguma questão, promove a clarificação através de questões que conduzam à compreensão do que é pedido ou dos aspetos que devem observar para conseguir avançar na resolução.

Após clarificação, o professor promove o trabalho autónomo a pares dando indicação aos alunos para continuarem a realização dos exercícios.

O Professor deverá promover a autonomia dos alunos solicitando a consulta ao caderno diário / manual.

(6) Clarificação de dúvidas na resolução dos exercícios do manual

Os alunos irão resolver os exercícios no quadro (um aluno/exercício separados no tempo) e no final da resolução o professor deverá promover a discussão com os conceitos e significados compreendidos nas aulas anteriores.

O Professor deve estabelecer a articulação dos exercícios com algumas questões das tarefas anteriores.

Exemplos:

- Estabelecer o paralelo entre as regras de derivação e da derivada por definição (Exercício 50 / Tarefa 3).
- Realçar que a derivada da função num ponto é o declive da reta tangente à abcissa desse ponto pertencente ao domínio da função. (Exercício 51 / Tarefa 2).

- O ponto em estudo tem de pertencer ao domínio da função (Caso exercício 51.3 - $\sqrt{-44}$ não pertence ao domínio de g(x)).
- Apoiar-se na representação gráfica, caso oportuno. (Exercício 51 – *Desmos*) https://www.desmos.com/calculator/irip8pnpdf podendo ser o próprio aluno a explorar o recurso.
- A derivada de uma função quadrática é uma função afim (exercício 54 / Tarefa 3)

O Professor dá tempo aos alunos para passarem para o caderno o que está escrito no quadro e questiona os alunos se existem algumas dúvidas.

O Professor solicita aos alunos que prossigam com a resolução dos exercícios do manual.

Os procedimentos anteriores de resolução no quadro e clarificação de dúvidas serão reiniciados no decorrer da aula (Decisão do Professor a tomar no momento).

APRENDIZAGEM COMPLEMENTAR

Exercícios das margens do manual do nº55 ao 59, pp.74-76 e Questão 6 da tarefa 3 - Obter algebricamente a generalização da derivada das funções racionais do tipo $y = \frac{a}{x}, a, x \neq 0$.

PROSSECUÇÃO DAS APRENDIZAGENS

- Aplicação das derivadas ao estudo do sentido de variação de uma função.
- Sinal da função derivada e extremos relativos de uma função.

AVALIAÇÃO

- Avaliação sumativa - A realizar no dia 30/04/2015.
- Avaliação reguladora por observação direta:

Capacidade de estabelecer conexões com os conhecimentos adquiridos e comunicação (justificar, formular e sentido crítico na argumentação), participação oral nas discussões, rigor matemático (escrito e em linguagem natural), autonomia e colaboração com os colegas.

PLANO – “Como varia a temperatura” e “Gráfico da função derivada”

Aula de 90 min (dois tempos) a realizar no dia 23/04/2015 das 08.15h/9.45h
Turma de Matemática A do 11º ano

Sumário (no início da aula)
Relação do sinal da derivada com a monotonia da função.“Pontos angulosos” do gráfico de uma função. Resolução da Tarefa 4 – “Como varia a temperatura” e Tarefa 5 -“Gráfico da função derivada ”.

TÓPICOS / SUBTÓPICOS

- Relação entre a monotonia de uma função e o sinal da sua derivada.
- Relação do máximo e mínimo num intervalo de uma função com os zeros da sua derivada.
- Pontos do gráfico de uma função, não diferenciáveis.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender a relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função num intervalo [a, b]. (tarefa “Como varia a temperatura”)
- Construção do “conceito imagem” de limite (Questão 3 e 4 da tarefa “Gráfico da função derivada”).
- Explorar a articulação das representações gráfica, numérica (quadro de variação) e algébrica de uma função, conforme fundamentação teórica.
- Explorar a relação entre os gráficos de uma função e da sua função derivada, mobilizando conhecimentos prévios sobre o significado da derivada de uma função.
- Desenvolver nos alunos o sentido crítico, o rigor e a confiança nos seus raciocínios.

- Manipular o conceito de derivada como um processo, atribuindo-lhe significado e não como um procedimento algébrico.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS POR QUESTÃO DA TAREFA:

Tarefa 4 - "Como varia a temperatura"

Objetivos específicos:

- Reconhecer uma função como um processo e não como um objeto (expressão algébrica) que permite determinados procedimentos algébricos (Juter, 2008).
- Promover a fluência na utilização articulada das representações gráfica e algébrica, conforme fundamentação teórica.

Objetivos para questão 1.1:

- Relacionar os máximos e mínimos da função com os zeros da derivada.
- Relacionar o significado físico da derivada com a taxa de variação instantânea.

Objetivos para questão 1.2:

- Relacionar o significado físico da derivada com a taxa de variação instantânea.
- Compreender que a função derivada está definida num intervalo (Ex: [0, 5[ou num ponto (Ex: 5).

Objetivos para questão 1.3:

- Relacionar a variação de uma função com o sinal da sua derivada.
- Compreender que o estudo do sinal da derivada de uma função permite identificar, caso existam, os seus extremos: máximos e mínimos, num determinado intervalo (extremos relativos).

Objetivos para questão 1.4:

- Compreender que o sinal da função derivada indica a variação da função.

Tarefa 5 - "Gráfico da função derivada"

Objetivos para questão 1:

- Explorar graficamente o conceito de função.

- Reconhecer a função como um processo e não como um objeto (expressão algébrica) que permite determinados procedimentos algébricos.
- Procurar a relação entre o sinal da derivada a partir da variação da função (processo inverso ao realizado na questão 1 da tarefa “Como varia a temperatura”).
- Relacionar o máximo e mínimo da função com os zeros da derivada.
- Consolidar os conhecimentos adquiridos na tarefa anterior “A subida da caixa” (questão 4.2), particularmente acerca do “declive” de uma reta vertical (Caso $(x_{0,}\, h(x_0))$).
- Reconhecer um “Ponto anguloso”, onde não existe derivada.
- Promover a fluência na utilização de várias representações (gráfica, numérica e algébrica) conforme fundamentação teórica.

Objetivos para questão 2:

- Compreender o conceito de função derivada num intervalo pertencente ao domínio da função.
- Explorar a representação gráfica da derivada de uma função.
- Relacionar os significados geométricos da função derivada com a própria função.
- Estabelecer conexões entre o conceito de derivada num ponto (declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$e o gráfico da função derivada.
- Interpretar geometricamente a função derivada para apreender o significado da representação algébrica.

Objetivos para questão 3 e 4:

- Intuir, através da representação gráfica, que a existência de uma assintota horizontal (y = b constante) numa função representa, no intervalo considerado, o eixo dos xx como assintota na sua função derivada. (declive tende para zero).
- Explorar o conceito de limite na relação entre o gráfico da função e o gráfico da função derivada (componente investigativa).
- Compreender e saber usar o conceito de limite.
- Compreender que o “limite pode ser alcançado” (constante “b”), dificuldade reportada na fundamentação teórica.

- Promover a fluência na utilização e articulação de várias representações (gráfica, numérica - tabela elaborada em 1.- e algébrica) conforme fundamentação teórica.
- Estabelecer conexões entre o conceito de derivada e o conceito de limite aplicado a uma curva.
- Explorar o conceito de limite por observação da representação gráfica.
- Clarificar o significado do limite aplicado a h(x) e h'(x): $\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{h(x)}$ e $\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{h'(x)}$, isto é: $x \to -\infty,\ h(x) aproxima - se\ de\ b$ e $x \to -\infty,$ $h'(x) aproxima - se\ de\ zero$ (declive 0, reta horizontal)

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Conhecimentos do Tema "Funções e Gráficos" do 10º. Ano, em particular: Interpretação de gráficos de funções, declive de uma reta, reta tangente a um ponto.
- Conceito de limite (forma intuitiva e formal).
- Representação gráfica da função módulo (f(x)=|x|).
- Representação gráfica de "bola aberta" e "bola fechada".
- Representação de intervalos abertos e fechados.
- Assíntota horizontal.
- Monotonia / tabela de variação de uma função.
- A derivada de uma função quadrática é uma função afim.

RECURSOS

- **Do professor:** Computador com *PPT* e recurso *Desmos* para exploração gráfica do sinal da derivada, de f (x) =|x| e g (x) =x^3. Tarefa para distribuição aos alunos e giz de várias cores.

Avisar que o Professor necessita da sala às 8.00h.

- **Dos alunos:** Caderno diário, papel, material de escrita, manual didático e calculadora gráfica para exercícios do manual (caso haja tempo excedente).

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

Comunicação matemática, autonomia, sentido crítico na argumentação e raciocínio matemático.

METODOLOGIA

- O Professor, quando circula pela sala durante o trabalho autónomo, questiona o par (ou aluno do par) individualmente, caso ache oportuno, no momento da realização da tarefa a pares.
- O Professor questiona a turma através de questões orientadoras, focalização e inquirição.
- Trabalho autónomo a pares – resolução de uma tarefa exploratória e exercícios do manual para tempo excedente, se for o caso.
- Os alunos resolvem todas/algumas questões no quadro (previamente selecionadas e/ou escolhidas pelo Professor, no decorrer da aula) com subsequente discussão em grande grupo tendo o Professor um papel orientador, incentivando o diálogo e pensamento crítico.
- Utilização do recurso *Desmos*.
- Sistematização das aprendizagens.

PAPEL DO PROFESSOR:

No momento da distribuição da tarefa:

- O Professor distribui a tarefa solicitando a ajuda de um aluno e indica que os alunos devem resolver as questões de forma ordenada (nº 1, 2…).
- O Professor dá indicação de que a tarefa deve ser feita a pares, numa folha por aluno e a caneta. Caso se enganem devem indicar que não é para considerar (como por exemplo, colocar entre parenteses) e voltar a fazer. Este procedimento é solicitado aos alunos tendo em vista a perceção por parte do professor, quando circular pela sala, do raciocínio dos alunos no desenvolvimento da tarefa e posterior recolha da resolução para análise e inclusão no relatório.
- O Professor dá indicação de que a correção deverá ser feita no caderno diário e a resolução será posteriormente entregue.

Nos momentos de realização autónoma da tarefa:

- Circular pela sala observando as resoluções dos alunos para poder selecionar as resoluções que podem trazer uma discussão produtiva em turma. As resoluções que possam trazer confusão à turma não devem ser selecionadas, porém o professor pode decidir escolher uma resolução que não esteja completamente correta ou completa de forma a levantar questões de raciocínio que possam ser generalizadas.

- O Professor circula pela sala observando as resoluções dos alunos para quando estiver no quadro a sistematizar e clarificar questões, saber em que ponto deve dar mais ênfase, quais as maiores dificuldades dos alunos, qual a fase do problema que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Só deve interferir, colocando questões orientadoras, se verificar que o aluno está bloqueado não prosseguindo o seu trabalho.
- O Professor, perspetivando uma futura reflexão (acerca das aprendizagens dos alunos e também para a completude da componente investigativa do relatório), retira algumas notas com a identificação das maiores dificuldades dos alunos, qual a fase dos problemas que lhes trouxe maior dificuldade, entre outras.
- Caso o Professor verifique que o rendimento de alguns alunos não é o previsto e que os mesmos estão "parados", deve iniciar momentos de clarificação, porém, os alunos que não apresentem dificuldade deverão prosseguir o trabalho.
- Caso o Professor verifique que o rendimento da maior parte dos alunos não é o previsto deve iniciar o/um momento de discussão.
- Em todas as questões deve solicitar particularmente ao aluno a sua ida ao quadro, confirmando assim o prévio consentimento do mesmo.

Nos momentos de discussão / clarificação das questões:

- Incentivar a reflexão e completude/melhoria das respostas com discussão em turma, aproveitando as intervenções dos alunos.
- No final de cada resolução o Professor deve incentivar a comunicação Professor / Aluno e Aluno / Aluno com questões orientadoras, de focalização e inquirição.
- Promover a capacidade de desenvolver o raciocínio e o pensamento científico.
- Promover a verbalização do raciocínio dos alunos e a discussão dos processos, confrontando-os com outros.

- Orientar o aluno para conjeturar novas hipóteses de resolução, como por exemplo utilizar outras representações que lhe são facilitadoras na aprendizagem. Desta forma pode proporcionar aos colegas outras perspetivas de abordagem à questão.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(0) Preparação da aula: Professor entra às 8.00h.

- O sumário, indicação de exercícios do manual e data serão escritos no topo do quadro.
- Preparação do *PPT*, recurso *Desmos*, câmara de vídeo e giz de várias cores.

(1) Início da aula: Entrada dos alunos (8.15m), sumário e indicação dos exercícios do manual que podem ser resolvidos pelos alunos que terminem mais cedo a tarefa (exercícios das margens do manual do nº 60 ao 74 inclusive, pp.78-86). ***(5 min)***

(2) Síntese das aulas anteriores: Projeção de *PPT (5 min)*

(3) Distribuição da Tarefa 4 - "Como varia a temperatura" - Indicação dos procedimentos a ter. ***(tempo incluído no momento seguinte)***

(4) Resolução da tarefa – Os alunos resolvem autonomamente e a pares ***(10 minutos)***

(5) Discussão / Clarificação da Questão 1: O Professor, durante o momento da resolução autónoma, seleciona as resoluções que possam trazer aprendizagem significativa à maior parte dos alunos e solicita ao respetivo aluno a sua ida ao quadro: ***(15 minutos)***

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.1:

- Necessitar da expressão algébrica da função f (aplicação exclusiva da representação algébrica; procedimento algébrico sem compreensão do significado).

Os alunos não interpretam geometricamente o conceito de derivada e calculam:

$$f'(17) = \lim_{h \to 0} \frac{f(17+h) - f(17)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(17+h) - 13}{h} = \cdots$$

Alunos: E agora? Não tenho a expressão algébrica de f…

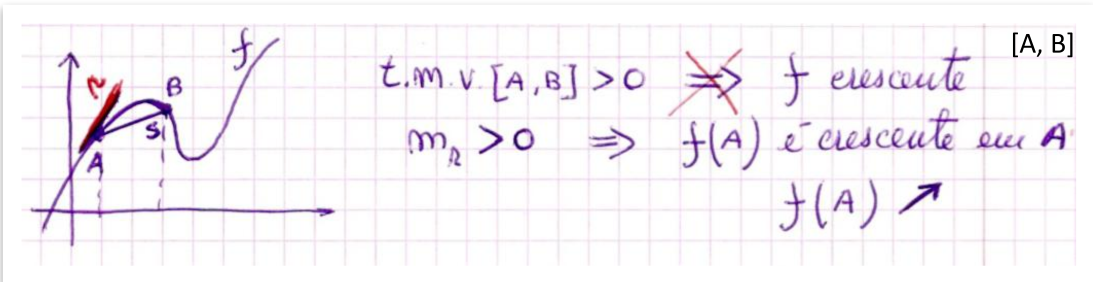
Prof: Qual o significado geométrico de $f\ '(17)$? (declive da tangente no ponto (17, 13))

Traça então uma tangente a esse ponto, o que podes dizer acerca do declive da tangente? E no ponto (5, -3)?

<u>Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.2:</u>

- Relacionarem a monotonia da t.m.v [a, b] (t.m.v.[a, b] > 0 não implica que a função seja crescente nesse intervalo) com o sinal da derivada no ponto “a”.

O Professor deve orientar os alunos, desenhando no quadro duas representações gráficas, para analisarem as diferenças e tirarem as conclusões:



- Não escreverem os extremos dos intervalos (fechados / abertos) corretamente

Prof: Dizes que f ´(x)> 0 no intervalo [0, 5], o que concluíste na alínea anterior? (f´(5)=0)

f’ (5) é maior ou igual a zero?

- Escreverem que f´(x)<0 em [0,5[e]17, 24]

Prof: Porque escreveste intervalo fechado em 0 e 24? O que te leva a pensar que existe derivada no ponto de abcissa 0 e 24? Como não sabemos o comportamento da função (a temperatura) no dia anterior e no dia seguinte não podemos tirar conclusões. Devemos deixar em aberto a hipótese de não existir derivada e para o garantir como escrevemos o intervalo? (aberto)

O Professor passa à discussão dos pontos angulosos, caso ache oportuno se não, no momento 6 (discussão) explora esta questão prolongando o gráfico à direita com uma reta.

Possíveis dificuldades dos alunos questão 1.3:

- Não terem identificado os zeros da derivada

Prof: Desenha a reta tangente ao ponto 5 e 17, o que podes dizer acerca dessa reta? É vertical? Horizontal…(horizontal). Se pensares em declive… é positivo? (é nulo). Preenche agora o quadro.

- Construírem o quadro de sinais em vez da tabela de variação

Aluno constrói o quadro de sinais.

Prof: Estuda o sinal e a monotonia de $f(x) = x^3$. O professor orienta o aluno para que este se depare com a diferença entre as duas situações. O aluno deverá concluir que:

Um quadro de sinais dá a informação acerca do sinal da função ou seja se f(x) é positivo ou negativo. Um quadro de variação dá a informação acerca da monotonia da função, ie, se é crescente ou decrescente. Por exemplo: Seja $f(x) = x^3$, $f(-2) = -8, f(-1) = -1$. Qual é o sinal de f(x) em

[-2,-1]? (negativo). f(x) é crescente ou decrescente nesse intervalo? (crescente). A função pode ter sinal negativo num intervalo e ser crescente nesse intervalo.

- Associar somente a derivada a um ponto e não a um intervalo de uma função.

Aluno: Porque é que podemos dizer que f'(x)<0 num intervalo?

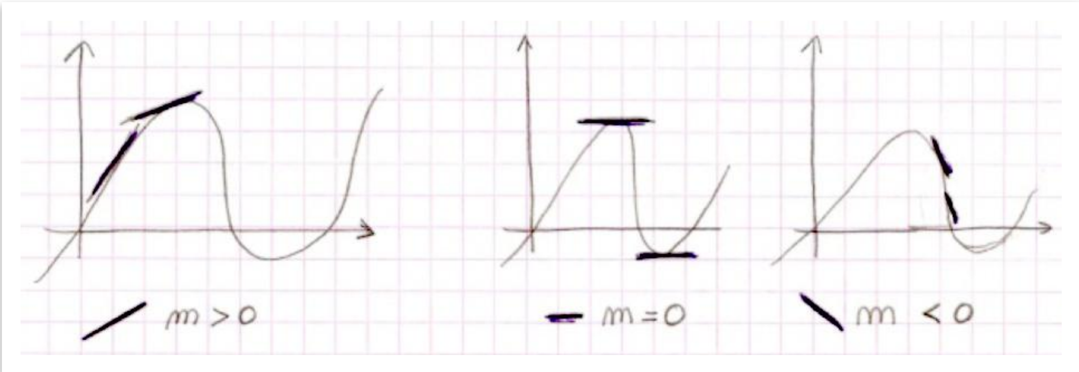
Prof: A derivada de uma função tem um intervalo associado. Podes calcular a derivada (se existir) num ponto específico do domínio da função através da sua expressão geral.

Uma função, de domínio R, quantos pontos tem? (Infinitos). A expressão da derivada da função, se calculado num ponto informa-nos acerca de…O que representa a derivada nesse ponto? (declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$. Que pode ter sinal … (negativo, positivo ou nulo). Se soubermos quando é que a derivada muda de sinal (Questão 1.3) podemos obter informação dos intervalos onde é positiva (declive positivo), negativa (declive negativo) ou nula (declive zero). A partir desta informação podemos recolher dados sobre a variação da função.

Possíveis dificuldades dos alunos 1.3:

Prof: Qual é o mínimo de f ? (-3) E o máximo? (13). Relacionando o máximo e o mínimo da função com o valor que obtiveram para a função derivada o que podem conjeturar? Será que é sempre assim? Porquê? Qual o sinal do declive da tangente ou seja da função derivada num intervalo onde a função nesse mesmo intervalo é crescente? E se for decrescente?

O Professor exemplifica no quadro:



O Professor orienta os alunos para relacionarem os máximos e mínimos relativos com os zeros da função derivada (a ser explorado no ficheiro *Desmos*).

Verificamos que o sinal da derivada nos dá informação acerca da monotonia da função e que os zeros da derivada também nos dão informação acerca dos máximos e mínimos.

Este é um tema que iremos aprofundar.

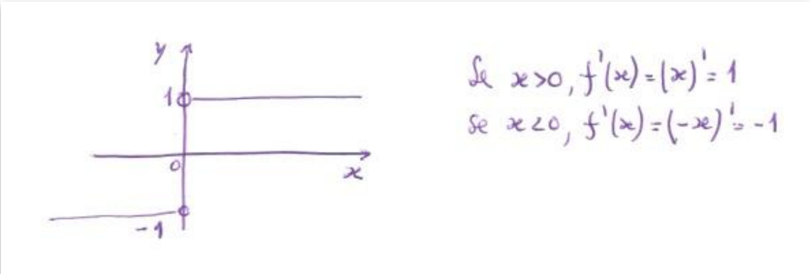
O Professor dá tempo aos alunos para passarem para o caderno o que está escrito no quadro e pergunta aos alunos se existem algumas dúvidas e passa à síntese das aprendizagens *PPT*.

(6) Síntese das aprendizagens: Projeção do *PPT (10 minutos)*

O Professor questiona a turma acerca dos intervalos abertos e fechados da questão 1.3, projeta o *PPT* e promove a discussão acerca de:

- Estudo da função $f(x) = |x|$; "$Pontos\ angulosos$" - https://www.desmos.com/calculator/aqgbwm3qfd

Prof: Como posso definir analiticamente $f(x) = |x|$? $(x\ se\ x > 0, 0\ se\ x = 0\ e - x\ se\ x < 0)$, como posso escrever $f'(x)$? $(\ 1\ se\ x > 0\ e - 1\ se\ x < 0)$. O que podemos concluir? (em x=0 não existe derivada).
Aluno: Mas a derivada de uma constante, neste caso é zero… porque não a consideramos?
Prof: Vem traçar a reta x=0 ao quadro… (O professor orienta o aluno para o “declive” de uma reta vertical). Se necessário, representa-se no quadro f´(x):



- Estudo da função $f(x) = x^3$
  https://www.desmos.com/calculator/aqgbwm3qfd

- $f´(0) = 0\ mas\ f(0)\ não\ é\ extremo\ de\ f$
- Alertar os alunos para que uma função é estritamente crescente num intervalo não implica que a sua derivada seja estritamente positiva nesse intervalo, caso de x=0 em $f(x) = x^3$ onde a derivada é zero e a função é estritamente crescente em R.
- A informação da calculadora pode ser errónea. Ex: $f(x) = |x - 2| + 1$. A calculadora apresenta f’(2)=0 e não existe derivada no ponto de abcissa 2, por ser um “ponto anguloso”.

O Professor solicita aos alunos que introduzam na calculadora a função f e que verifiquem o resultado de f´(2)=0. Paralelamente é projetada a função no ficheiro *Desmos* que identifica f´(2) = (2, “undefined”).

(7) Distribuição da Tarefa 5 - “Gráfico da função derivada” - Indicação dos procedimentos a ter e objetivação do trabalho a desenvolver que é o de relacionar e interpretar geometricamente uma função e a sua função derivada. ***(tempo incluído no momento seguinte)***

(8) Realização da tarefa "Gráfico da função derivada" – Os alunos resolvem autonomamente e a pares. ***(10 minutos)***

NOTA: Se o professor verificar que a maior parte dos alunos não conseguem dar resposta a alguma questão, promove a clarificação através de questões que conduzam à compreensão do que é pedido ou dos aspetos que devem observar para conseguir avançar na resolução.

Ex: No quadro de variação que completaste qual é o sinal da derivada no intervalo]x_0 , x_1[(-)? Observa os gráficos A, B, C e D. Nesse intervalo, em que gráfico (s) é que a derivada é negativa? (A e C). Já excluíste dois, o B e o D. Agora vais procurar alguma justificação que te faça optar entre o A ou o C.

Após clarificação, o professor promove o trabalho autónomo a pares dando indicação aos alunos para continuarem a realização da tarefa.

(9) Discussão / Clarificação da Tarefa 5 - "Gráfico da função derivada": O Professor, durante o momento da resolução autónoma, seleciona as resoluções que possam trazer aprendizagem significativa à maior parte dos alunos e solicita ao respetivo aluno a sua ida ao quadro: ***(30 minutos)***

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 1:</u>

- Construir a tabela de variação partindo da monotonia da função e não do sinal da derivada.

Aluno: Como preencho o valor de h'(x) nos pontos x_0 e x_1?

Prof: O que é a derivada em x_1? (É o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa x_1)

No gráfico de h(x), traça uma reta tangente a x_1. Qual é o seu declive? (0). O que estás a dizer é que o declive da reta tangente à função no ponto de abcissa x_1 é zero, que algebricamente se escreve h´(x_1)=0. Podes completar a tabela.

- O aluno não se recorda de como preencher a tabela de variação.

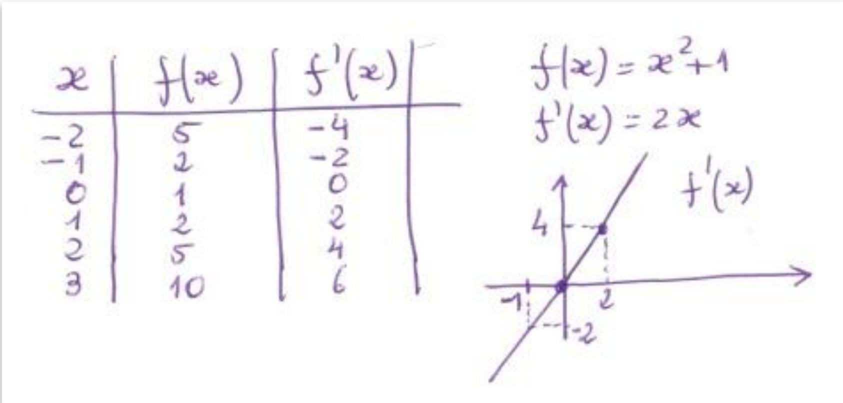
Prof: Na tarefa anterior preencheste a tabela de variação da função f que descrevia a temperatura durante um dia em função da hora do dia. Neste caso, o procedimento é o mesmo. Como varia h(x)? Quando é que h(x) é crescente? Em que intervalos? E decrescente? Começa por analisar o intervalo] -∞, x_0[. h(x), nesse intervalo é crescente, decrescente? (crescente). Que símbolo utilizamos? (seta). Vai completando os intervalos, observando o gráfico de h(x) no que diz respeito à monotonia. Com esses dados podes concluir o sinal da derivada. Se a função é estritamente crescente num intervalo qual é o sinal da derivada nesse intervalo? (+)...

Possíveis dificuldades dos alunos na questão 2:

- O aluno não compreende que os gráficos apresentados são de funções derivadas.

Aluno: A derivada é o declive da reta tangente… é um número! Não estou a perceber estes gráficos!

Prof: Vamos utilizar outra representação. Faz uma tabela para a função f (x) = $x^2 + 1$ e $f'(x)$. O Professor orienta o aluno para construir uma tabela perspetivando uma aprendizagem através de outra representação (conforme fundamentação teórica).



Observando o gráfico de f´(x), para x=2 o que representa y=4? (o declive da tangente ao ponto de abcissa 2). Exemplificando…

Encontraste o gráfico da função derivada! Agora já sabes que os gráficos A, B, C e D são gráficos de funções derivadas.

- O aluno não interpreta corretamente o gráfico da função derivada.

Utilizando o exemplo da questão:

Prof: Observa o gráfico A, quais são as coordenadas de x_1? (x_1, 0). O que significa a ordenada 0? (que é nula…). Vamos ver: h’ (x_1)=0, o que é h’ (x_1)? (declive da reta tangente)… Então o zero representa o declive da reta. Se te disser que h´(x)=2 e te perguntar qual é o declive da reta que passa no ponto de abcissa x o que me respondes? (2). É desta forma que deves interpretar os gráficos A, B, C e D.

- Não reconhecer que no ponto anguloso h (x_0), não existe derivada.

Prof: Supõe que à direita de x_0 , no gráfico de h(x), está x. Quando x tende para x_0 ,o que acontece com o declive da secante que passa em $(x_0, h(x_0))\ e\ (x, h(x))$? (Professor orienta o aluno para o comportamento da secante). E agora? O h (amplitude do intervalo) torna-se cada vez menor… O que significa? O que está a acontecer à reta que contém os pontos x_0 e x? Que reta é essa? O Professor orienta o aluno para concluir que a secante em limite se aproxima da tangente. Existe tangente no ponto x_0? (Não) Porquê? (A tangente é uma reta vertical, não tem declive). Bem, então, o que estás a dizer é que não existe tangente, conforme verificamos na aula de 23 Abril (Nota: Na 5ª aula lecionada solicitei a uma aluna que escolhesse dois pontos da reta x=1 (1,2) e (1,5) e que calculasse o declive da reta que passava nesses dois pontos. Após discussão, a turma chegou à conclusão que uma reta vertical não tem declive logo num ponto onde a tangente é uma reta vertical, não existe derivada) mais, o que existe são semi tangentes que à esquerda e à direita do ponto têm declives distintos.

Então, h'(x) representa… (declive da tangente), mas a tangente não existe! Como tens o declive de uma reta que não existe, qual é o "declive" de uma reta vertical? Como se representa no gráfico, agora de h'(x), um ponto que não existe? (bola aberta). Agora já sabes interpretar o ponto anguloso de h (x) e a "bola aberta" em h' (x). Quero ouvir a tua explicação desde o início. O Professor deve ir promovendo o rigor matemático nas expressões orais do aluno.

Esta clarificação poderá ser discutida em grande grupo, caso seja uma dúvida generalizada (o que é bastante provável).

- Associar o sinal da derivada à monotonia da função mas não lhe atribuir significado.

Aluno: Sei que h(x) é crescente e h´(x) é positivo… Mas não sei ver os gráficos!

Prof: O que significa h'(x) ser positivo? (Tem sinal +). Exemplifica no gráfico de h(x) o que estás a dizer.

O Aluno marca no intervalo$]x_1, +\infty[$ uma reta tangente com declive positivo. O Professor orienta o aluno para observar o que se passa na função h (x) quando as sucessivas tangentes têm declives positivos, ie, a função h (x) é crescente. Desta forma o aluno vai atribuindo significado à relação que existe com o sinal da derivada e a monotonia da função. Posteriormente o Professor orienta o aluno para verificar nos gráficos A, B, C e D qual (ais) o (s) que tem representado o ponto “ (x, +)” o que resultará na exclusão do gráfico B.

O Professor deve aproveitar a dúvida do aluno para realçar que o facto de uma função ser estritamente crescente num intervalo não implica que a sua derivada seja estritamente positiva nesse intervalo, caso de x=0 em $f(x) = x^3$. Neste caso podemos retirar informação porque nos é dado o gráfico de h(x).

- No caso do gráfico A o aluno não se recordar que a derivada de uma função quadrática é uma afim.

Aluno: Acho que o A é o correto! Mas o C também…

Prof: Qual é a diferença entre um e outro?

Aluno: No C temos uma reta e no A não.

Prof: Observa o gráfico de h, o que dirias acerca da expressão algébrica da função no intervalo $]x_0, +\infty[$?

Aluno: É quadrática conforme refere a sugestão.

Prof: Quando exploramos o *Desmos* nas outras aulas e comparamos a função derivada com a função quadrática…. Quando descobriste a regra de derivação para x^2 o que obtiveste?

Aluno: Não me lembro

Prof: Podes consultar o teu caderno ou recorreres à calculadora ou até construíres o gráfico de f´(x) sabendo que f(x)= x^2, como por exemplo. A seguir vais conseguir optar entre A e C.

<u>Possíveis dificuldades dos alunos na questão 3 e 4:</u>

- Encontra “b” e “0” mas não atribui significado.

Aluno: Encontrei os valores de b e 0 e agora?

Prof: Explica como chegaste a esse resultado.

Aluno: Encontrei b porque sei que y=b é assintota e sei que é assim, o zero porque sei que a derivada de uma constante, o “b” é zero. Agora não sei responder à questão 3, só sei calcular.

(O Professor reconhece que o aluno sobrepõe a manipulação algébrica ao significado de limite).

Prof: Qual o significado de h’(x)? Pensa no que foi dado nas aulas anteriores, esquece por agora a questão 3.

Aluno: declive da reta tangente….

Prof: Que é dado por que expressão? Por certo sabes as expressões algébricas todas!

Aluno: Claro! $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, mas eu não tenho h(x) nem h'(x)! Como substituo os valores?

Prof: Neste caso não necessitas valores. Vamos interpretar os gráficos. Comecemos por h(x)…

O Professor, através de perguntas de focalização, inquirição e orientação induz o aluno a construir o "conceito imagem" de limite. Numa primeira abordagem, através da secante no gráfico de f orienta o aluno para a tangente que é a assintota.

Seguidamente o aluno deve concluir que a assintota **em limite** representa a tangente, que tem declive zero então, no gráfico da derivada, a assintota (y=0) que é o $\lim_{x\to -\infty} h'(x)$ (eixo dos xx).

"Nota pessoal: Refletir sobre esta questão motiva-me a querer explorá-la de uma forma mais profunda com os alunos o que pode acontecer numa discussão em grande turma"

- Significado de limite

Aluno: Ainda não compreendi "isto do limite"!

O Professor deverá orientar o aluno para a compreensão do conceito através de um processo dinâmico (apresentar o conceito de limite de forma intuitiva) abordando a secante a aproximar-se da tangente, razão incremental, a amplitude do intervalo h, entre outras, conforme fundamentação teórica. O Professor utilizará as várias representações (gráfica, numérica e algébrica).

(10) Síntese das aprendizagens: Projeção *PPT (5 min)*

O Professor dá tempo aos alunos para passarem para o caderno o que está escrito no quadro e pergunta aos alunos se existem algumas dúvidas.

APRENDIZAGEM COMPLEMENTAR

- Exercícios das margens do manual do nº 60 ao 74 inclusive, pp.78-86

PROSSECUÇÃO DAS APRENDIZAGENS

- Problemas de máximos e mínimos que envolvem áreas ou volumes.

AVALIAÇÃO

- Avaliação sumativa - Mini teste no dia 8/5 (a confirmar pela Profª Inês).
- Avaliação reguladora por observação direta:

Capacidade de raciocínio e comunicação (justificar, conjeturar, formular, sentido crítico na argumentação), participação oral nas discussões, rigor matemático (escrito e em linguagem natural), autonomia e colaboração com os colegas.

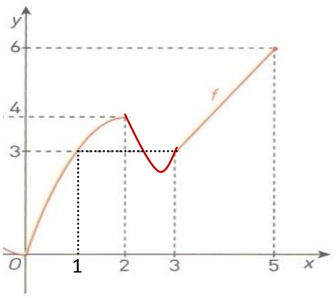
TAREFA

Adaptada de:
Teixeira, P. et al. (1998). *Funções: matemática – 11.ºano de escolaridade (p.103 e 107).* Disponível no *web site* do: Ministério da Educação e Ciência:
http://www.dge.mec.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=148#i
com a inclusão dos itens 3 e 4 (componente investigativa).

Anexo III – Tarefas

TAREFA 1 – VARIAÇÃO E TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO [a,b]

1. Na figura está representada a função f, de domínio [0, 5] que relaciona a altura da água num tanque (em metros) com o tempo decorrido após as 0:00 horas.



1.1 Preenche a seguinte tabela:

x	0	1	2	3	5
f(x)					

1.

uma das seguintes expressões e indica o respetivo significado no contexto do problema.

a) $\mathbf{f(5) - f(3)}$ (variação de f no intervalo [3, 5])

b) $\frac{\mathbf{f(5) - f(3)}}{\mathbf{5-3}}$ (taxa média de variação de f no intervalo [3, 5])

1.3 Calcula e indica o significado do resultado no contexto apresentado:

a) $\frac{\mathbf{f(3) - f(0)}}{\mathbf{3-0}} =$ **b)** $\frac{\mathbf{f(3) - f(2)}}{\mathbf{3-2}} =$

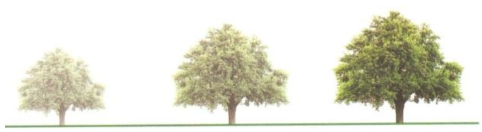
1.4 Escreve uma expressão algébrica que permita calcular a taxa média de variação (t.m.v.) para um intervalo [a, b] da função f.

1.5 Recorrendo à f função f e justificando as tuas respostas, dá exemplos que provem que as seguintes afirmações **são falsas**:

a) “Se a taxa média de variação de uma função é positiva num intervalo, então a função é crescente nesse intervalo.”

b) “Se a taxa média de variação de uma função é negativa num intervalo, então a função é decrescente nesse intervalo.”

c) “Se a taxa média de variação de uma função é nula num intervalo, então a função é constante nesse intervalo”.



2. A altura de uma árvore, em metros, t anos após o momento em que foi plantada é dada pela função f definida por $\boldsymbol{f(t)} = \frac{\mathbf{15}\boldsymbol{t}\mathbf{+9}}{\mathbf{4}\boldsymbol{t}\mathbf{+5}}$.

2.1 Qual era o tamanho da árvore quando foi plantada?

2.2 Calcula e indica o significado do resultado no contexto apresentado.

a) $f(2,5) - f(0)$ **b)** $\frac{f(2,5)-f(0)}{2,5}$ **c)** $\frac{f(5)-f(2)}{3}$

3. A utilização de produtos químicos numa reserva agrícola contaminou uma zona durante 6 dias.

Após t dias da utilização dos produtos químicos, a área que se encontra contaminada é dada, em hectares, pela função $\boldsymbol{C}$ definida por: $\boldsymbol{C(t) = -0,05t^3 + 2t}; \quad \boldsymbol{0 \leq t \leq 6}$

Calcula e explica, no contexto apresentado, qual o significado do valor encontrado de:

3.1 A variação de C(t) nos primeiros 3 dias?

3.2 A taxa média de variação de C(t):

a) nos primeiros 3 dias?

b) nos últimos 2 dias?

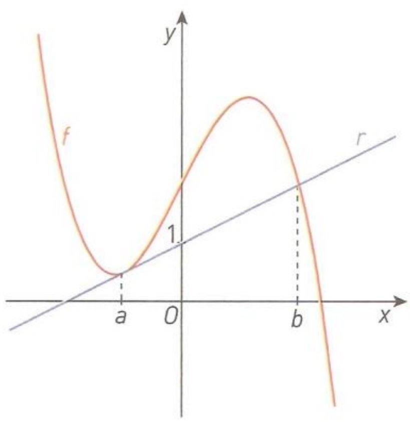
3.3 Conjetura um motivo que explique a diferença dos resultados encontrados em a) e b).

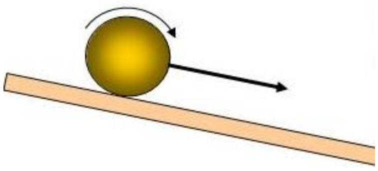
4.

No referencial da figura está uma representação gráfica de uma função f e uma reta r que passa pelos pontos do gráfico de f de abcissas a e b.

Sabe-se que a taxa média de variação de f no intervalo $[a, b]$ é $\frac{1}{2}$.

Escreve a equação reduzida da reta r.





TAREFA 2 – “A BOLA NO PLANO INCLINADO”

Derivada da função num ponto

1. Uma bola desce um plano inclinado. A distância $(\boldsymbol{d})$, em *centímetros*, percorrida pela bola em função do tempo $(\boldsymbol{t})$, em *segundos*, é dada por:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{2}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}.$$

1.1 Representa graficamente a função d na situação descrita.

1.2 Determina a velocidade média (t.m.v.) da bola 2 segundos após o lançamento.

1.3 Representa, no gráfico elaborado em 1.1, a reta que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalo encontrado em 1.2 e determina a sua equação reduzida.

1.4 À velocidade da bola, num determinado instante, chama-se velocidade instantânea. Qual será a velocidade da bola no instante t = 2 *segundos*?

Sugestão:

1.4.1 Recorrendo à calculadora faz uma estimativa da velocidade instantânea da bola no instante $t = 2$ *segundos*, preenchendo a tabela seguinte (arredondado às milésimas):

	A	**B**
h $\longrightarrow$0	Intervalo [2, 2+h]	Velocidade média [2, 2+h]
0.1	[2, 2.1]	8.200 (cm/s)
0.09		
0.08		
0.07		
0.005		
0.001		

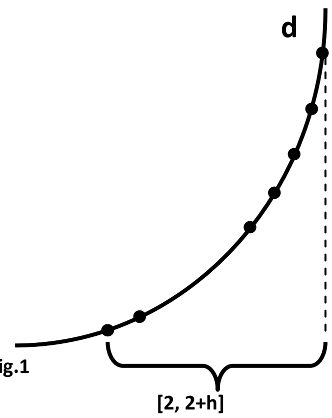


Fig.1

1.4.2 Utilizando o esboço ampliado da representação gráfica da função **d** no intervalo [2, 2+h] - Fig.1, desenha as retas que passam nos pontos cujas abcissas são os extremos de cada intervalo encontrado em **A**.

i) Compara os declives das retas desenhadas.

- O que observas?
- Como relacionas o valor de h com o declive das retas desenhadas?
- Explica, no contexto apresentado, qual o significado das tuas observações.

ii) Observa a tabela de 1.4.1. Indica para que valor se aproximam os declives (velocidade média) quando aplicas valores de h sucessivamente mais pequenos (h tende para zero; h $\rightarrow 0$).

1.5 Conjetura a equação reduzida da reta que passa no ponto t=2.

TAREFA 3 - "A SUBIDA DA CAIXA"- Taxa de variação (derivada) de uma função

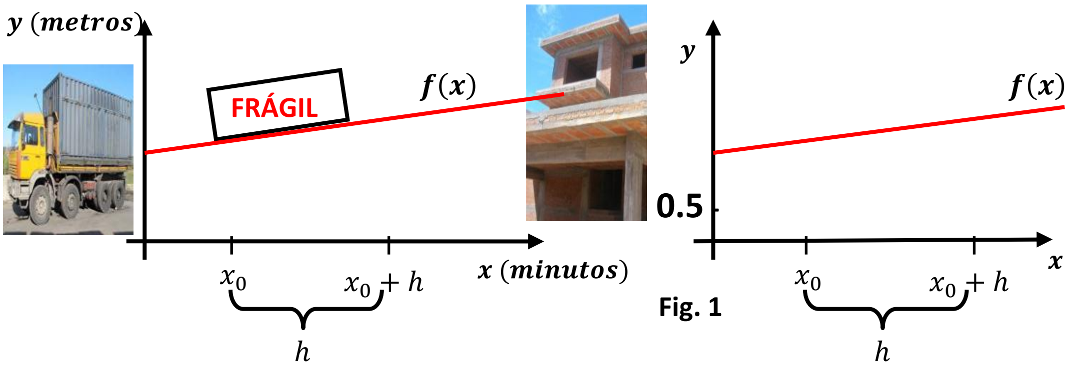


Fig. 1

PARTE I

A função $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$ descreve, em metros, a subida de um equipamento frágil numa rampa de transporte até à plataforma de uma casa em construção, durante um determinado intervalo de tempo, em minutos.

1. Sabe-se que a velocidade média da caixa em qualquer intervalo de tempo $[x_0, x_0 + h]$ é de 0,5 m/min.

1.1 Qual é o significado desta afirmação?

1.2 Representa, no gráfico Fig. 1, a reta "s" que passa nos pontos: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

1.3 Determina a velocidade instantânea da caixa no instante x_0.

1.4 Qual é o significado geométrico do resultado obtido em 1.3?

1.5 Representa, com outra cor, no gráfico Fig. 1 a reta "r" tangente ao gráfico de f em qualquer ponto de abcissa pertencente ao intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

1.6 Compara a representação gráfica da reta "r" desenhada na Fig. 1 com a representação gráfica de f.
O que podes concluir acerca do <u>declive da reta "r"</u> em qualquer ponto do gráfico de f?

2. 2.1 Obtém a expressão algébrica da função derivada $f'(x)$, $x \in [x_0, x_0 + h]$.

2.2 Representa na Fig. 1 o gráfico de $f'(x)$. O que podes concluir acerca da monotonia de $f'(x)$?

3. Supõe que a velocidade instantânea da caixa em qualquer intervalo de tempo $[x,\ x + h]$ é 0,7 m/min. Escreve uma expressão algébrica da função $f(x)$ que descreva a subida do equipamento, nestas condições.

4. 4.1 De acordo com o trabalho que desenvolveste ao longo da tarefa, completa a seguinte tabela:

Função afim:	**Derivada da função afim:**
$f(x) = 0.5x + b$	$f'(x) =$
$g(x) = \frac{x}{5} + b$	$g'(x) =$
$v(x) = x$	$v'(x) =$
$w(x) = mx + b$	$w'(x) =$
$u(x) = b$	$u'(x) =$
$i(x) = 0$	$i'(x) =$

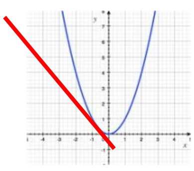
4.2 Considera a reta x=1. O que podes concluir acerca da sua derivada? Justifica a tua resposta.

PARTE II

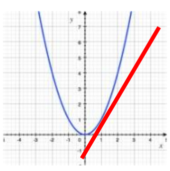
5. 5.1 - Obtém na calculadora uma representação gráfica da função $f(x) = x^2$. De seguida, recorrendo à ferramenta <<dy/dx>>, completa a tabela seguinte com os valores $f'(x)$: Derivada de $f\ em\ x$:

$\boldsymbol{x}$	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**3**
$\boldsymbol{f'(x)}$					

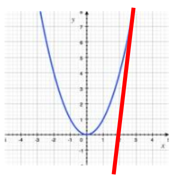
5.2 – Faz corresponder, a cada um dos cinco pares ordenados $(x, f'(x))$ encontrados na tabela, um dos gráficos seguintes. Explica o teu raciocínio.



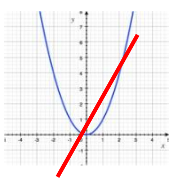
$(x, f'(x))$=(__,__)



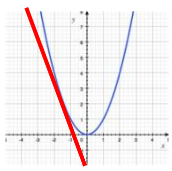
$(x, f'(x))$=(__,__)



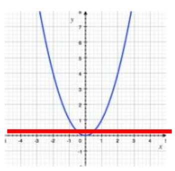
$(x, f'(x))$=(__,__)



$(x, f'(x))$=(__,__)



$(x, f'(x))$=(__,__)



$(x, f'(x))$=(__,__)

5.3 - Marca num referencial, os pontos de coordenadas $(x, f'(x))$ que obtiveste na tabela e a partir dos valores da tabela encontra a expressão analítica de $f'(x)$.

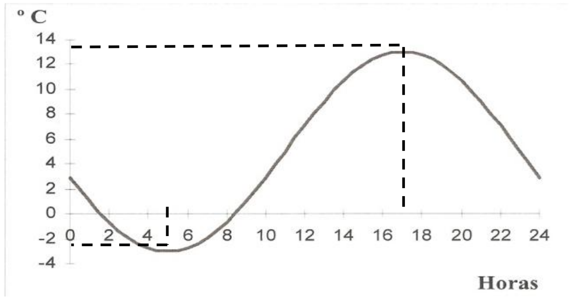
5.4 – Utiliza a definição de derivada e confirma a expressão que encontraste anteriormente.

5.5 - Obtém a expressão algébrica da função derivada de uma qualquer função quadrática $f(x) = ax^2, a \in R.$, de domínio R.

5.6 - O que podes concluir acerca da representação gráfica da derivada de uma qualquer função quadrática de domínio R ?

6. Utilizando a definição de derivada, encontra a expressão algébrica da função derivada de uma qualquer função racional do tipo $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$, com x um elemento qualquer do domínio de f.

TAREFA 4 – "COMO VARIA A TEMPERATURA"



1. Observa o gráfico da função f, que descreve a temperatura, em graus centígrados, durante um dia, numa determinada região, em função da hora do dia.

1.1 A que horas se verificou a temperatura máxima? E a mínima?
Indica a taxa de variação da temperatura nessas horas do dia.

1.2 Indica o <u>maior intervalo de tempo</u> onde a taxa de variação da temperatura é positiva **(+)** e os dois maiores intervalos onde é negativa **(-)**.

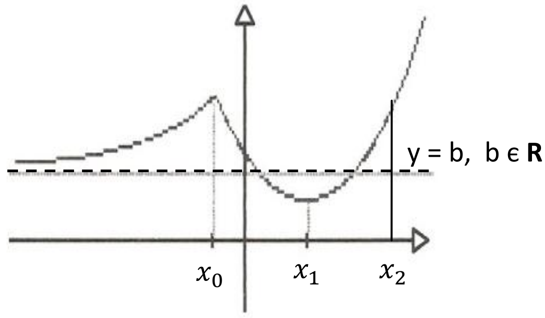
1.3 Com base nos resultados obtidos em 1.1 e 1.2 completa <u>**os intervalos**</u> e a seguinte <u>**tabela de variação**</u>:

	0		**5**		**17**	**24**
f´(x) – Taxa de variação						
f(x)						

1.4 O que podes observar acerca da variação da função f a partir do sinal (+ ou -) da função derivada?

TAREFA 5 – "GRÁFICO DA FUNÇÃO DERIVADA"

Considera a função $\boldsymbol{h(x)}$ representada graficamente por:

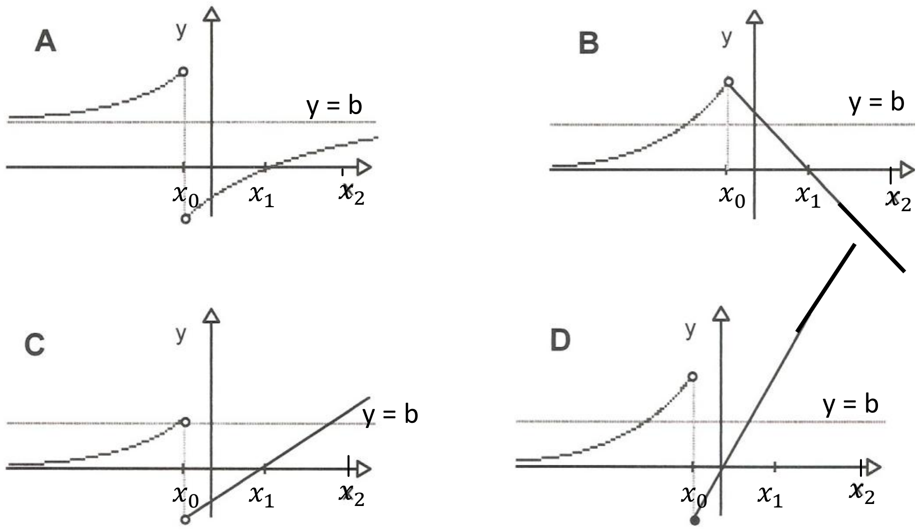


1. Completa a tabela de variação da função $\boldsymbol{h(x)}$ e possível variação de sinal de $\boldsymbol{h'(x)}$:

$\boldsymbol{x}$	- ∞	$\boldsymbol{x_0}$		$\boldsymbol{0}$		$\boldsymbol{x_1}$		$\boldsymbol{x_2}$
$\boldsymbol{h'(x)}$								
$\boldsymbol{h(x)}$		$\boldsymbol{h(x_0)}$ $\boldsymbol{m\acute{a}x\ relativo}$				$\boldsymbol{h(x_1)}$ $\boldsymbol{min\ relativo}$		

2. Identifica, **<u>justificando a tua resposta</u>**, qual das quatro representações gráficas seguintes corresponde à derivada de $\boldsymbol{h(x)}$ ou seja $\boldsymbol{h'(x)}$. **Explica,** igualmente, porque é que **<u>não</u>** escolheste as outras representações gráficas.

Sugestão: Começa por observar a variação de sinal de $\boldsymbol{h'(x)}$ nas quatro representações gráficas e considera que no intervalo $[x_0, x_2]$ o comportamento de $\boldsymbol{h(x)}$ é o de uma função quadrática.



2.1 O gráfico ____ **representa** a função derivada de $\boldsymbol{h(x)}$ porque: ……….
2.2 O gráfico ____ **não** representa a função derivada de $\boldsymbol{h(x)}$ porque: …….
2.3 O gráfico ____ **não** representa a função derivada de $\boldsymbol{h(x)}$ porque: …….
2.4 O gráfico ____ **não** representa a função derivada de $\boldsymbol{h(x)}$ porque: …….

3. Por observação da representação gráfica de $\boldsymbol{h(x)}$ obtém o valor de: $\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{h(x)} =$

4. Por observação da representação gráfica **A**, obtém o valor de: $\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{h'(x)} =$

4.1 A opção A representa a função derivada de $\boldsymbol{h(x)}$? Justifica a tua resposta com o resultado que encontraste em 4.

Anexo IV – Questionário de respostas abertas fundamentado em Tall (1993)

NOME: ____

1. O que significam para ti as expressões:

a) “Tende para”____

b) “Limite”____

c) “Tem limite”____

d) “Tão próximo quanto eu queira” ____________________________

e) “Infinito”____

f) “Infinitamente grande”________________________________

g) Infinitamente pequeno________________________________

2. Relaciona as expressões indicadas em 1. com as imagens abaixo ilustradas.

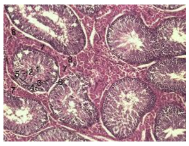
Nota: Caso queiras podes relacionar uma expressão com nenhuma, com uma ou com mais imagens.

____
____
____

$\boxed{x \to a}$

____
____
____

____
____
____



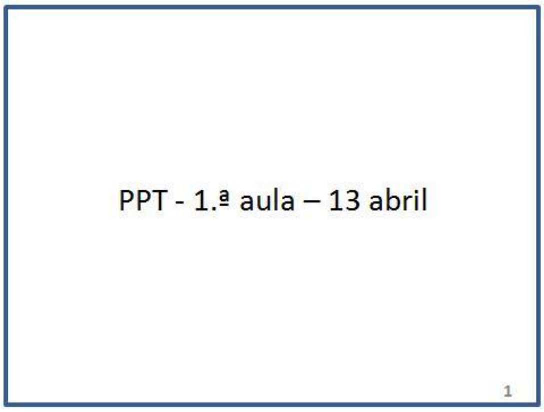
____
____
____

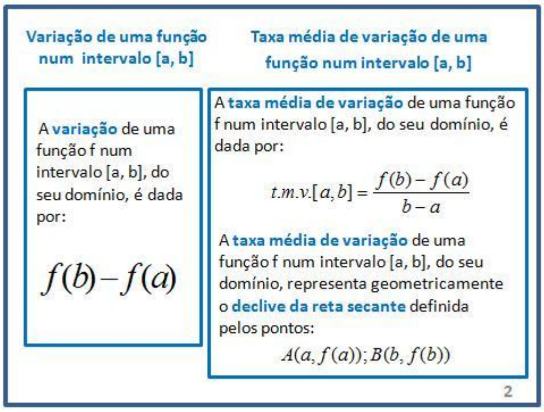
____
____
____

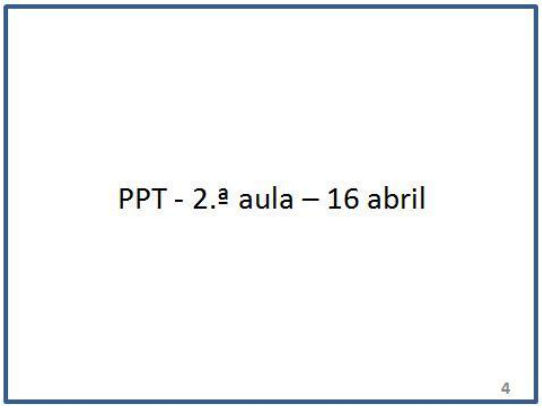
3. Preenche a seguinte tabela sabendo que $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$, $\boldsymbol{com\ x \neq 0}$

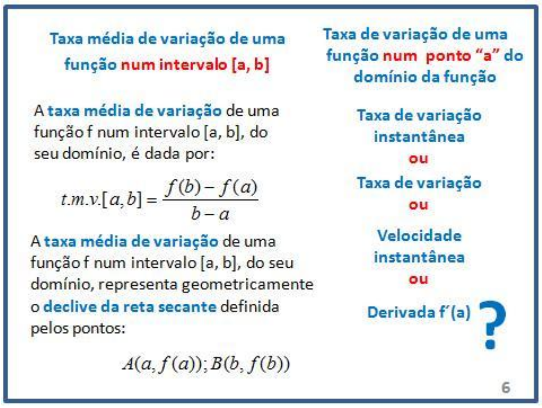
x	$f(x)$

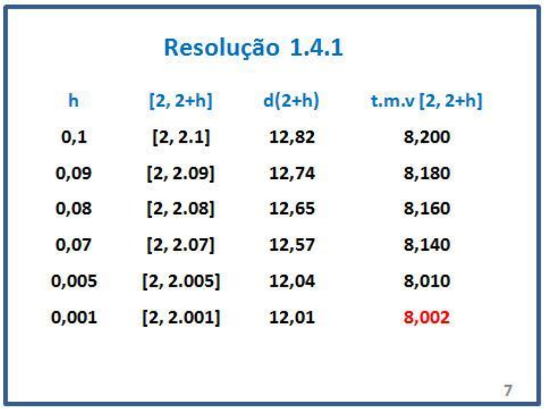
Anexo V – Power Point (*PPT*) projetado em sala de aula

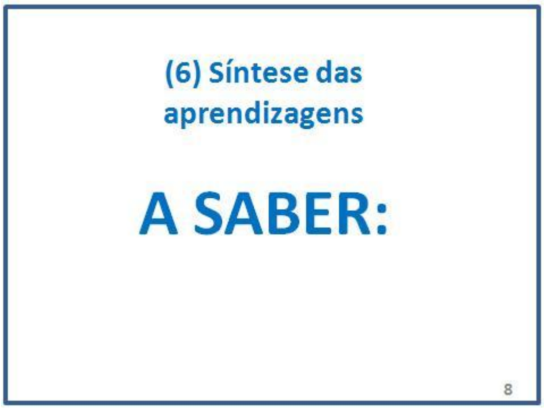








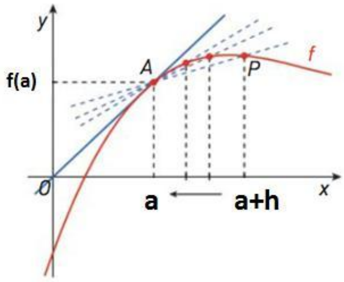




DECLIVE DA RETA SECANTE QUE SE APROXIMA DO DECLIVE DA RETA TANGENTE

https://www.desmos.com/calculator/irip8pnpdf

9



10

A **taxa de variação instantânea** de uma função f, para um certo valor a do seu domínio, representa o valor para que tende a taxa média de variação de f quando se consideram sucessivos intervalos de extremos a e $a+h$ com h a tender para zero, mas diferente de zero.

Designamos esse valor pelo limite quando h tende para zero da taxa de variação média e escrevemos,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A **taxa de variação instantânea** em $x=a$ é denominada **derivada da função f em $x=a$** e representa-se por $f'(a)$. Assim,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

11

Derivada de f em "a": f´(a)

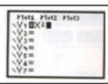
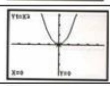
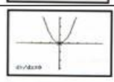
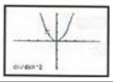
A taxa de variação de f em "a", ou seja, f´(a), representa geometricamente o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa "a".

12

PPT - 3.ª aula – 17 abril

Enviadas as instruções da calculadora para o mail da turma dado que, por falta de eletricidade na aula, o slide não foi projetado. As instruções eram necessárias para a resolução da questão 5.1 da Tarefa 3 – "A subida da caixa"

13

Teclas a Premir	Descrição	Ecrã
Y = X,T,θ,n x^2	Visualizar o menu Y = . Escrever em Y1 a expressão x^2.	
ZOOM 4 TRACE	Selecionar a opção 4· ZDecimal do menu ZOOM, sendo apresentado de imediato o gráfico da função.	
2nd TRACE [CALC] 6 0 ENTER	Calcular a derivada da função no ponto x = 0.	
2nd TRACE [CALC] 6 (-) 1 ENTER	Calcular a derivada da função no ponto x = -1.	

14

PPT - 5.ª aula – 23 abril

15

Definição de reta tangente ao gráfico de uma função f

- A definição de reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abcissa x0 é **a reta que passa no ponto P(x0, f(x0)) e tem como declive a derivada de f em x0.**

- **Como na função afim os declives das retas tangentes são iguais concluímos que há sobreposição das mesmas com o gráfico da própria função.**

16

QUADRO RESUMO – REGRAS DE DERIVAÇÃO

FUNÇÃO	FUNÇÃO DERIVADA	ABREVIADAMENTE
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$(k)' = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$(x)' = 1$
$f(x) = mx + b$	$f'(x) = m$	$(mx + b)' = m$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$(x^2)' = 2x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$

- A derivada de uma função constante é 0.
- A derivada da função identidade é 1.
- A derivada de uma função afim é uma função constante de domínio R.
- A derivada de uma função quadrática é uma função afim.
- Atenção no uso da calculadora, por vezes dá resultados errados. Por exemplo para $f(x)=|x-2|+1$. A calculadora apresenta o valor 0 para $f'(2)$ mas não existe derivada no ponto $x=2$ (ponto anguloso).

17

Alusão à História da Matemática

18

Século XVII

"Século de ouro" na Matemática

- NOVAS TEORIAS
- NOVOS INSTRUMENTOS
- NOVOS CONCEITOS

19

SÉCULO XVII
SURGE PELA PRIMEIRA VEZ O
CONCEITO DE DERIVADA

Isaac NEWTON
(1643 – 1727)

Gottfried Wilhem LEIBNIZ
(1646 – 1716)

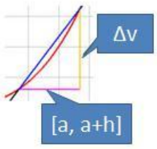
Descobrem independentemente este conceito

20

Isaac NEWTON - Físico

"Conceito de derivada" através da determinação de velocidades instantâneas.

Calculou a velocidade média em intervalos de "a" a "a + h" cada vez mais pequenos, isto é, fez tender "h" para zero.

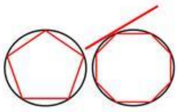


21

Gottfried Wilhem LEIBNIZ

- **Introduz a simbologia**
- **"Conceito de derivada" através da resolução de problemas relacionados com a determinação de tangentes a curvas.**

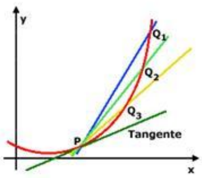
Leibniz vê uma curva como um polígono com um número infinito de lados e a tangente como uma reta definida pelo ponto de tangência e um ponto da curva infinitamente próximo.



22

Jean Le Round d´ALEMBERT
1717 - 1783

D´ALEMBERT vê a tangente como o limite da reta secante, isto é, quando um dos pontos da interseção tende para o outro.

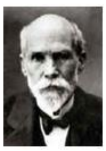


23

Século XIX - 1823

Augustin CAUCHY (1789 – 1857)

- **Noção de limite.**
- **Definição formal de derivada.**



José Anastácio da Cunha (1744 – 1787)

- **Segundo alguns historiadores terá precedido Cauchy na apresentação clara da noção de infinito e de infinitésimo.**

24

PPT / Extra

25

Se uma função tem derivada **positiva** em todos os pontos de um intervalo é estritamente **crescente** nesse intervalo.

Se uma função tem derivada **negativa** em todos os pontos de um intervalo é estritamente **decrescente** nesse intervalo.

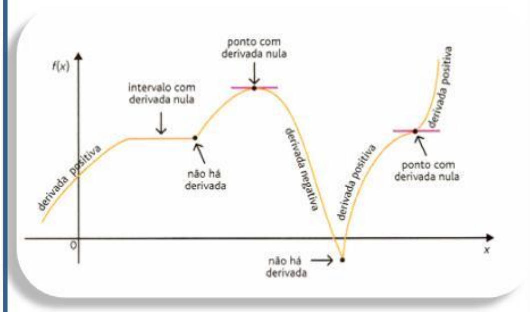
Se uma função tem derivada **nula** em todos os pontos de um intervalo ela é **constante** nesse intervalo.

26

Se a derivada se anula num ponto passando de **positiva para negativa**, a função cresce à esquerda e decresce à direita desse ponto. Há um **máximo relativo**.

Se a derivada se anula num ponto passando de **negativa para positiva**, a função decresce à esquerda e cresce à direita desse ponto. Há um **mínimo relativo**.

27



28

VARIAÇÃO DA FUNÇÃO f A PARTIR DO SINAL DA FUNÇÃO DERIVADA

https://www.desmos.com/calculator/dlzhsldcgo

29

Quadro I - Enquadramento Teórico - Tall e Vinner (1981) / Tall (1993)

CONCEITO DE LIMITE

“Conceito definição” formal (*) -
Definição formal do conceito

Ex: Definição matemática de limite
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ **e**

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon => |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c}| < \delta$$

Situação 1:
Conflito mais grave
As propriedades / processos são evocados simultaneamente e entram em conflito com a definição formal de limite.

“CONCEITO IMAGEM”

Descrição de toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito
Ex: Limite

Representações mentais (*mental pictures*) onde se inclui o “conceito definição” (construído com progressivo nível de rigor e formalização)
Podem ser:
- Gráficas
- Numéricas (Tabelas)
- Simbólicas (Procedimentos algébricos)

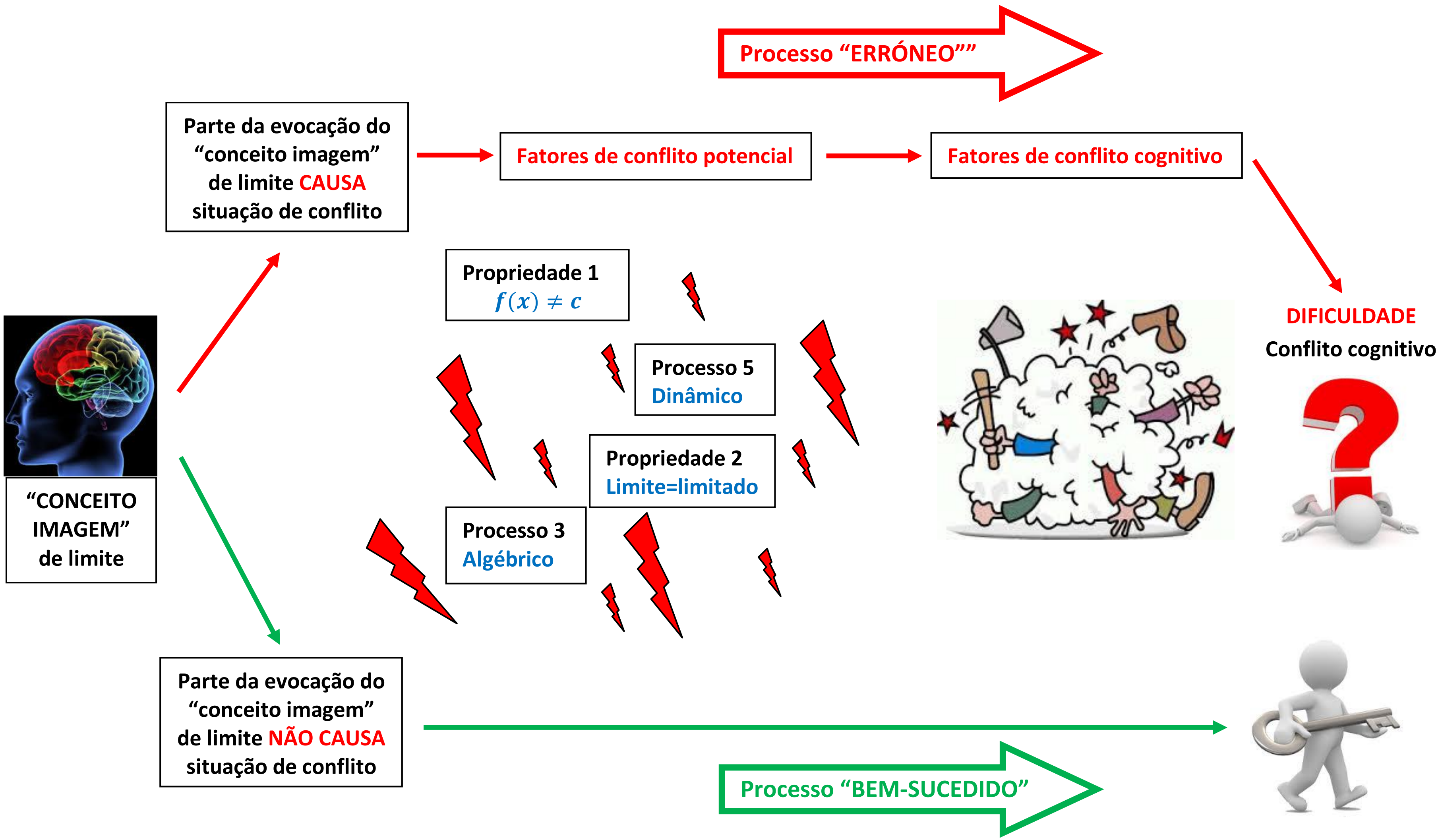
Aspetos referentes a **Propriedades**
Ex: O limite nunca é alcançado (?)

Situação 2:
Conflito menos grave
As propriedades / processos são evocados simultaneamente e entram em conflito

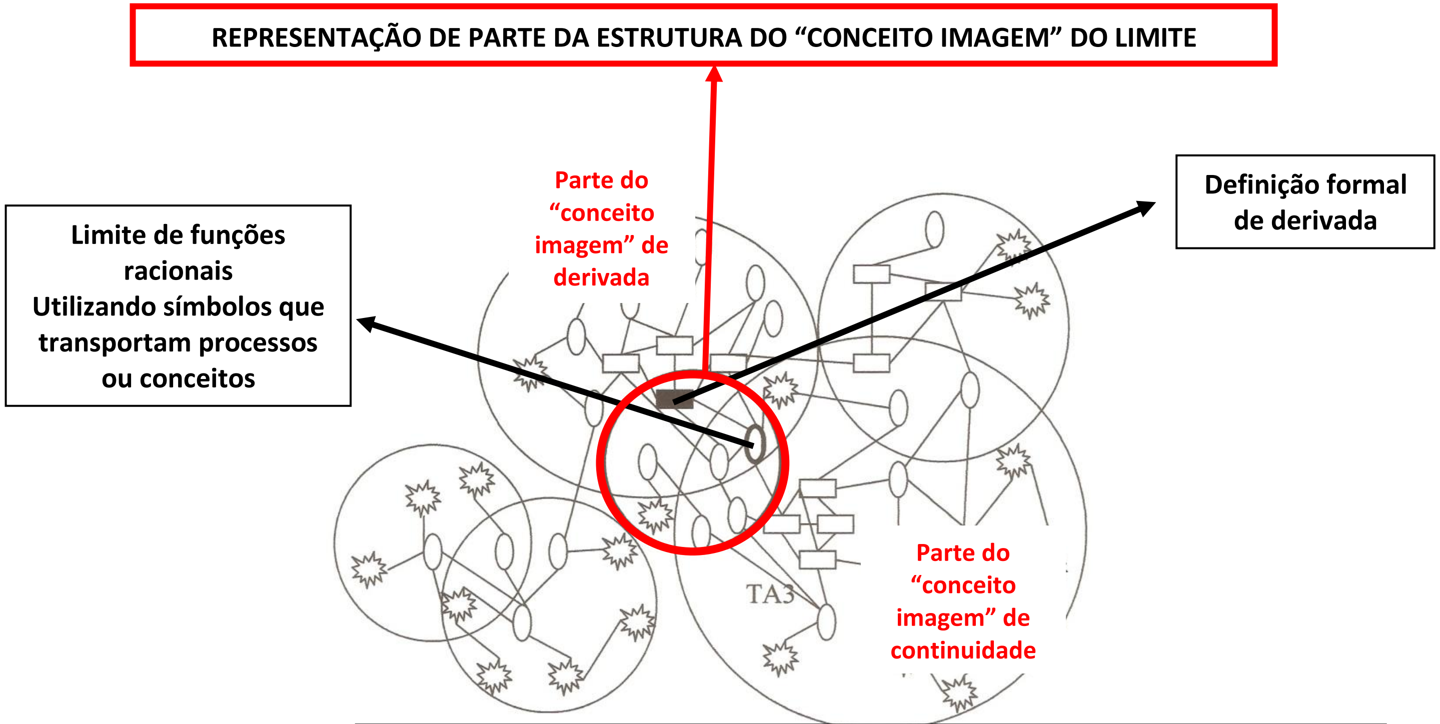
Aspetos referentes a **Processos**
Ex: À medida que *x* tende para a, *f(x)* aproxima-se de *c*. Processo Dinâmico

(*) – Conforme é referido em Tall (2003), este considera que o “conceito definição” formal é parte do “conceito imagem” porém, Vinner enfatizou a demarcação do mesmo.

Quadro II - Enquadramento Teórico dos processos "erróneo" e "bem-sucedido" - Tall e Vinner (1981) / Tall (1993)



Quadro III - Enquadramento Teórico - Junter (2008) "Student´s concept development of limits"



1º MUNDO – " mundo corporificado" - O QUE FOI CONCRETIZADO, REALIZADO ACERCA DO LIMITE
2º MUNDO – " mundo percetual" - SÍMBOLO COMO PROCESSO OU CONCEITO
3º MUNDO – " mundo formal" - FORMALIZAÇÃO

Quadro IV - Aulas lecionadas e tarefas aplicadas

AULAS de 90 min. / Data	TEMA/TÓPICOS	TAREFAS	Anotações relacionadas com a intervenção	Metodologia
AULAS DA RESPONSABILIDADE DA PROFESSORA COOPERANTE				
23 jan. a 18 março exclusive	Tema II Tópico Funções racionais		Papel de observadora participante	
AULAS LECIONADAS				
1ª Aula 13 abril	Tema II Tópico Taxa de variação e Derivada	**TAREFA 1** – "Variação e taxa média de variação [a, b]"		• Exploração de recurso dinâmico *Desmos* em sala de aula. • Trabalho autónomo a pares na resolução das tarefas • Utilização das representações gráfica, numérica e simbólica. • Discussão coletiva. • Sistematização das aprendizagens
2ª Aula 16 abril		**TAREFA 2** – "A Bola no plano inclinado"		
3ª Aula 17 abril		**TAREFA 3** – "A subida da caixa" – Resolução da parte I em sala de aula e resolução da parte II para TPC		
4ª Aula 20 abril		**TAREFA 3** – "A subida da caixa" – Discussão da parte I e resolução de exercícios do manual		
5ª Aula 23 abril		**TAREFA 3** – "A subida da caixa" – Discussão da parte II e resolução de exercícios do manual – preparação para o teste de avaliação	***PPT*** - Alusão à História da Matemática	
AULAS DA RESPONSABILIDADE DA PROFESSORA COOPERANTE				
4 maio	Tema II Tópico Taxa de variação e Derivada	**TAREFA 4 -** "Como varia a temperatura" e **TAREFA 5 -** "Gráfico da função derivada"	Efetuados diálogos com os alunos durante a realização das tarefas, com ***registo áudio***	• Trabalho autónomo a pares na resolução da tarefa
7 maio a 28 maio inclusive	Tema III Tópico Sucessões reais	**TAREFA 6** (Do manual) – "Piscina no relvado" Proposta para trabalho de casa	Papel de observadora participante	